Présentations d'opérades et systèmes de réécriture

Yves Guiraud

28 juin 2004

Plan :

Plan :

- Théories équationnelles et
  systèmes de réécriture de termes

Plan :

- Théories équationnelles et systèmes de réécriture de termes

- Gestion des ressources

Plan :

- Théories équationnelles et systèmes de réécriture de termes

- Gestion des ressources

- La présentation $L(\mathbb{Z}_2)$

Théories équationnelles et systèmes de réécriture de termes

La théorie équationnelle des monoïdes :

La théorie équationnelle des monoïdes :

- Générateurs (opérateurs) :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$

La théorie équationnelle des monoïdes :

- Générateurs (opérateurs) :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$
- Relations (équations, égalités) :
  - Associativité $\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z))$
  - Neutre à gauche $\mu(\eta,x) = x$
  - Neutre à droite $\mu(x,\eta) = x$

Exemples de termes de la théorie des monoïdes :

Exemples de termes de la théorie des monoïdes :

- Représentations des opérateurs :

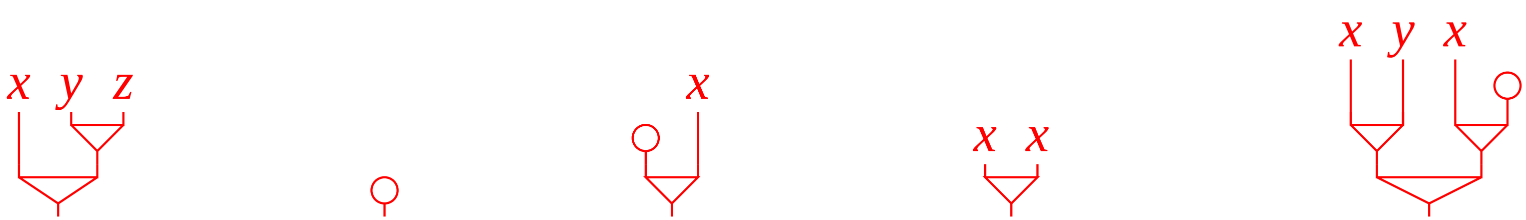
μ η

Exemples de termes de la théorie des monoïdes :

- Représentations des opérateurs :

$\mu \qquad \eta$

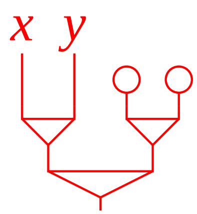
- Représentations de cinq termes :



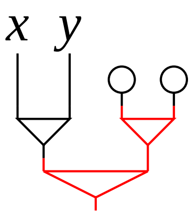
$\mu(x,\mu(y,z)) \qquad \eta \qquad \mu(\eta,x) \qquad \mu(x,x) \qquad \mu(\,\mu(x,y)\,,\,\mu(x,\eta))$

Égalité entre deux termes :

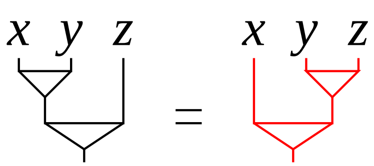
Égalité entre deux termes :



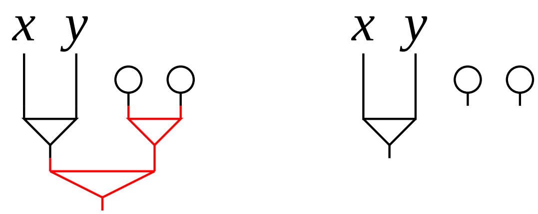
Égalité entre deux termes :



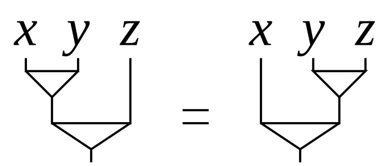
Équation d'associativité :



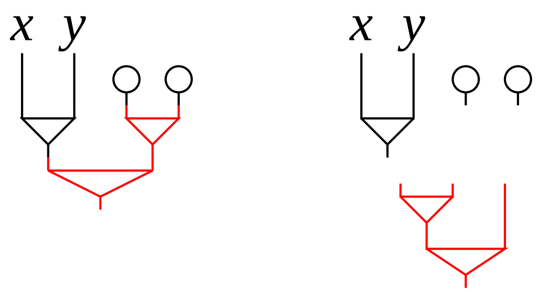
Égalité entre deux termes :



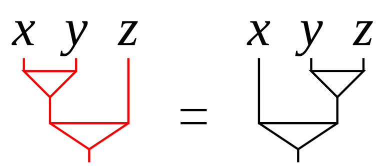
Équation d'associativité :



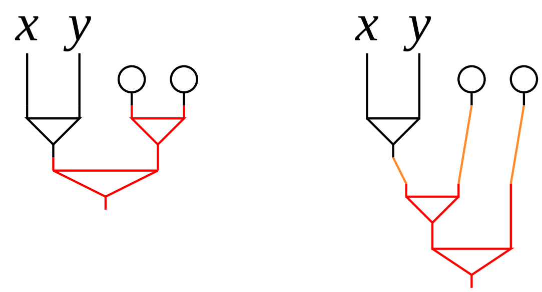
Égalité entre deux termes :



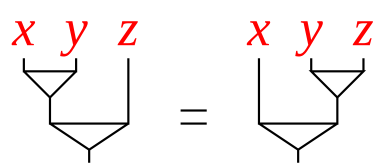
Équation d'associativité :



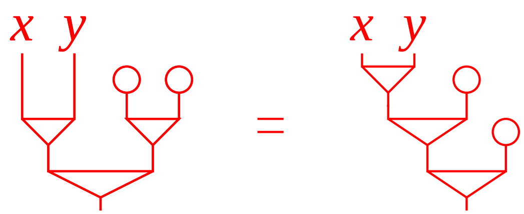
Égalité entre deux termes :



Équation d'associativité :

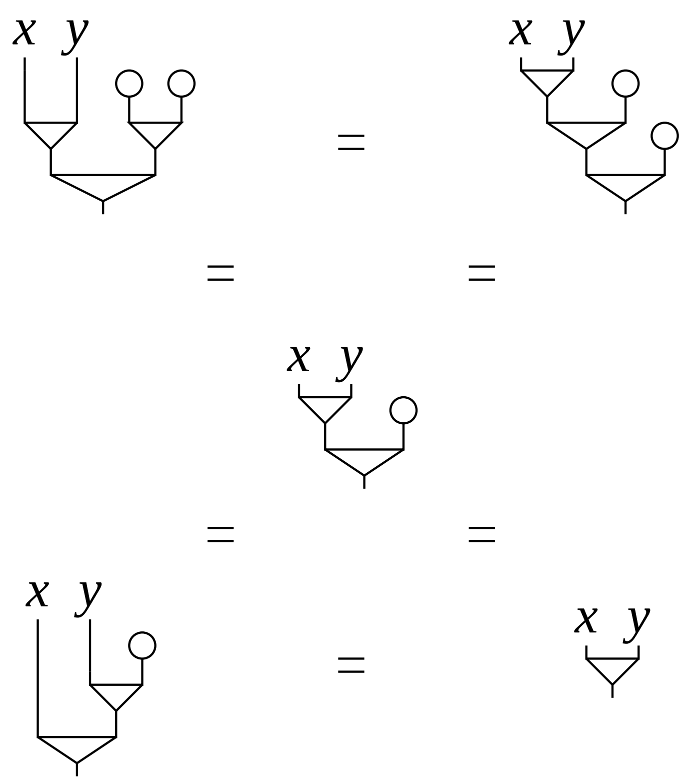


Égalité entre deux termes :

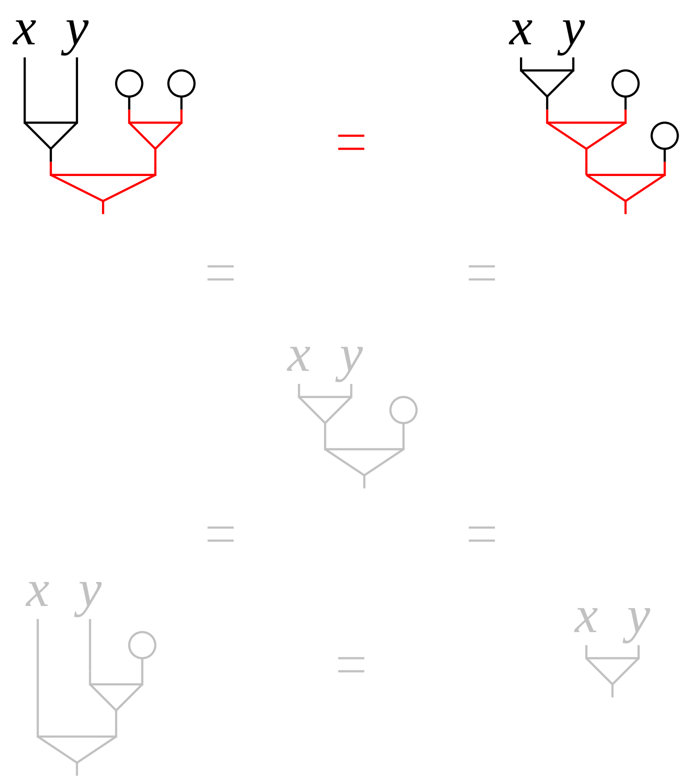


Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :

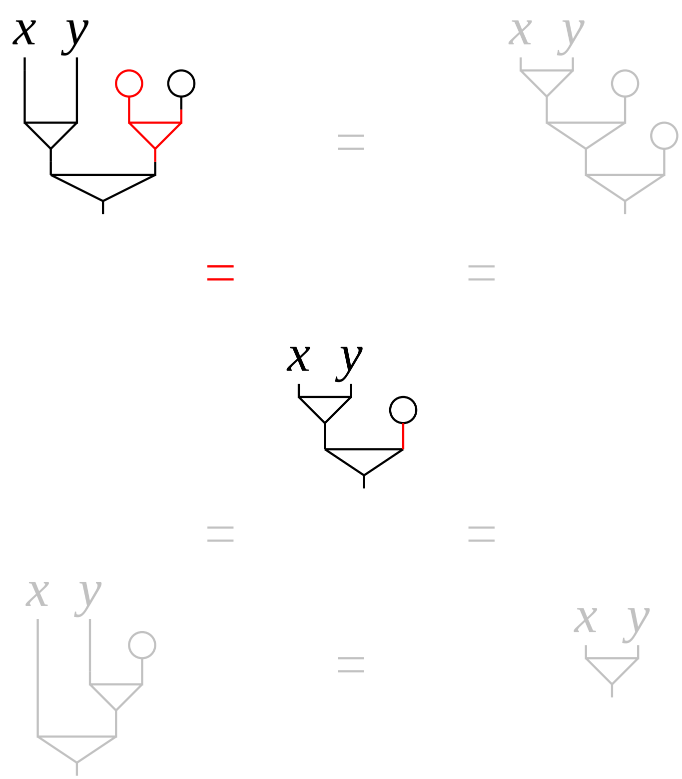
Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



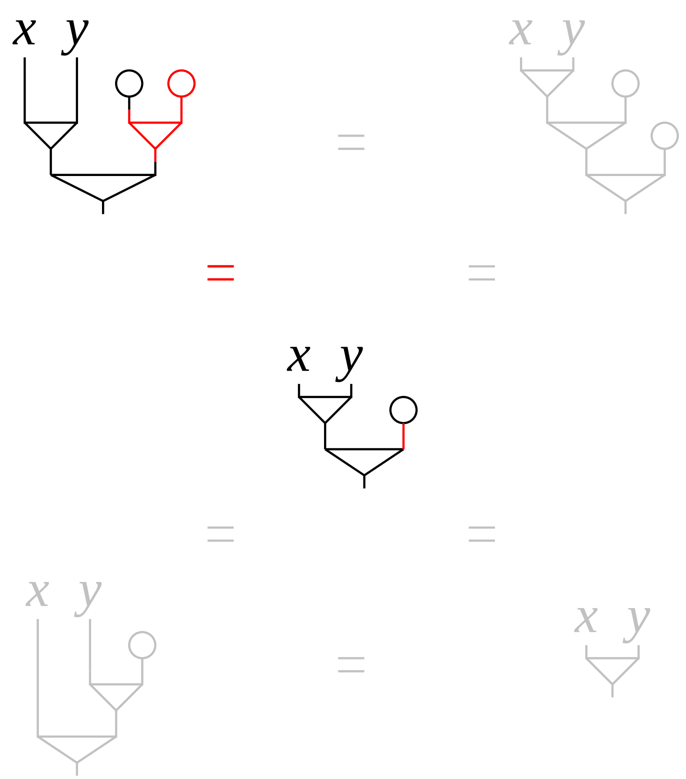
Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



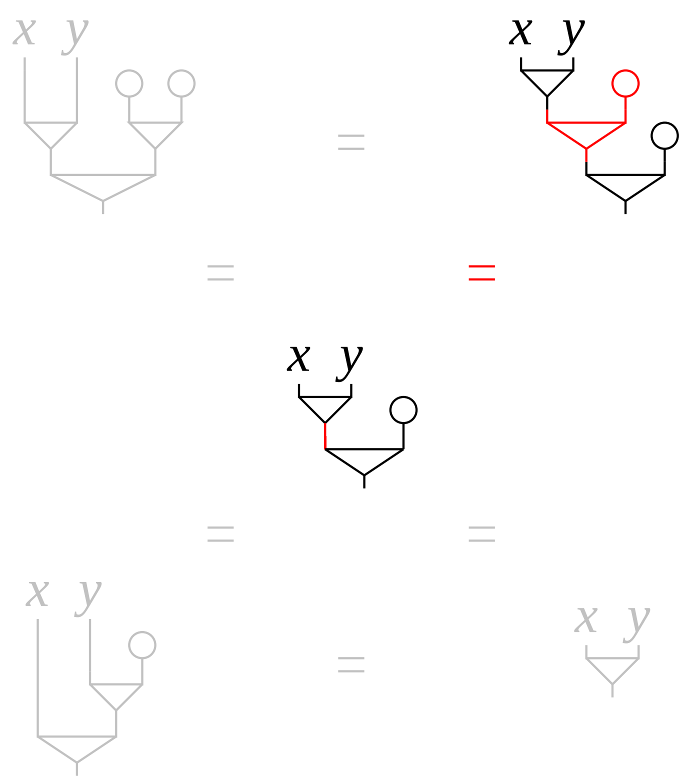
Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



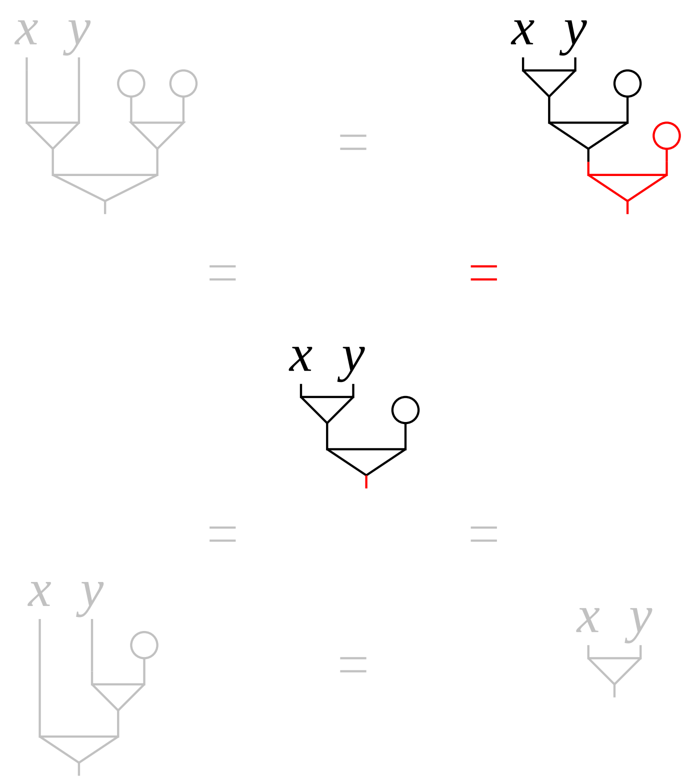
Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



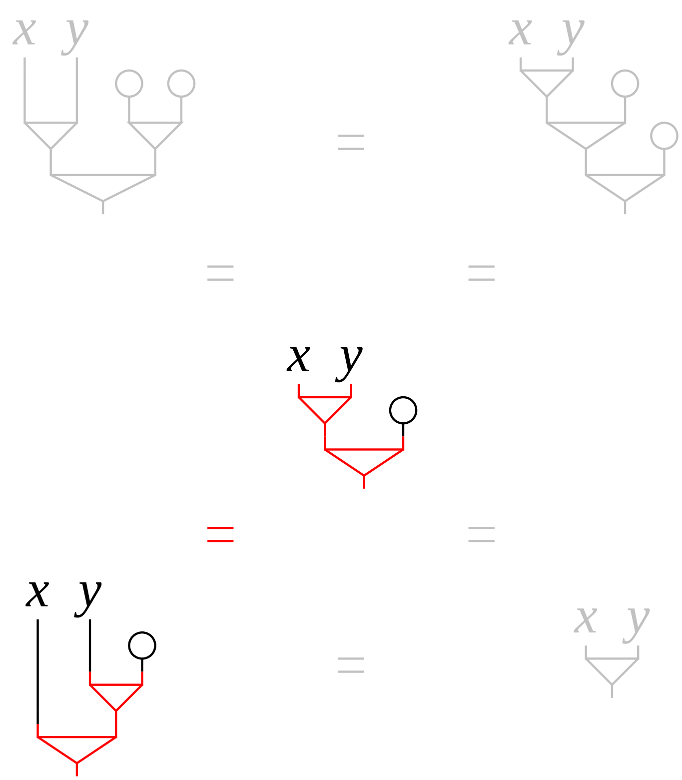
Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



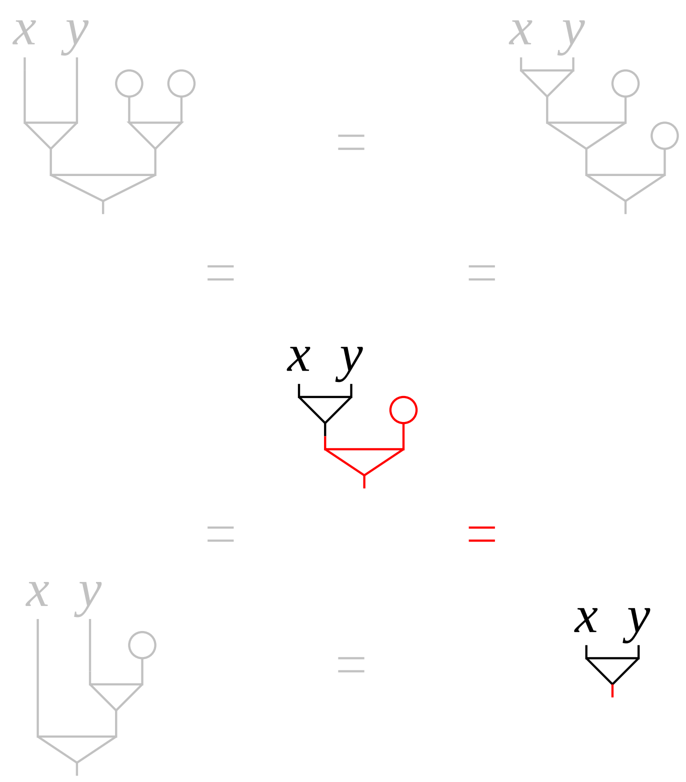
Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



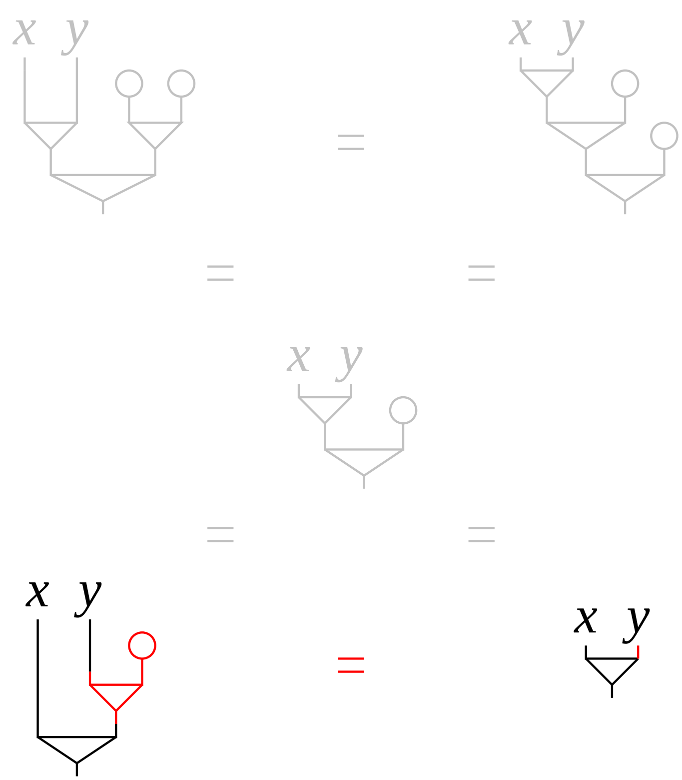
Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



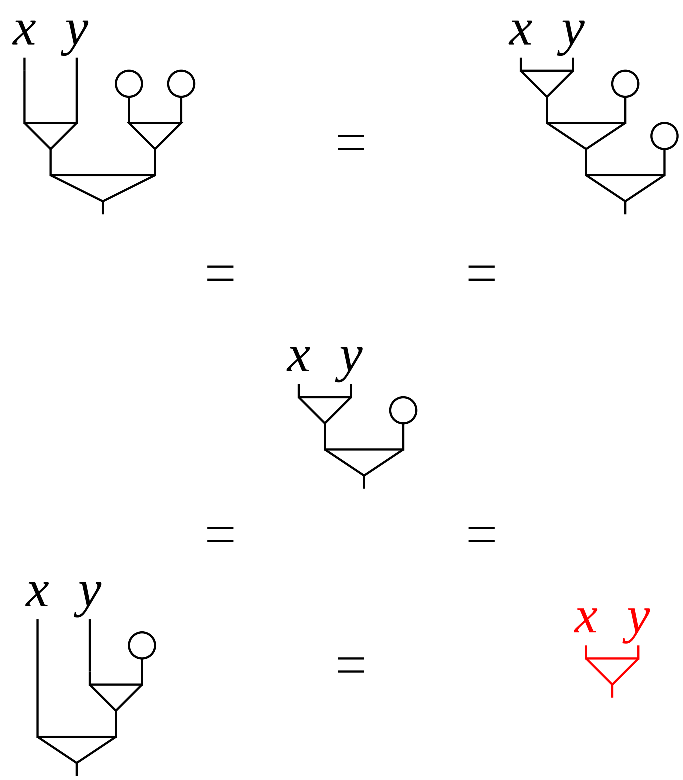
Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



Cinq termes égaux dans la théorie des monoïdes :



Ces termes représentent tous $(x, y) \mapsto \mu(x, y)$.

Un système de réécriture associé à la théorie des monoïdes :

Un système de réécriture associé à la théorie des monoïdes :

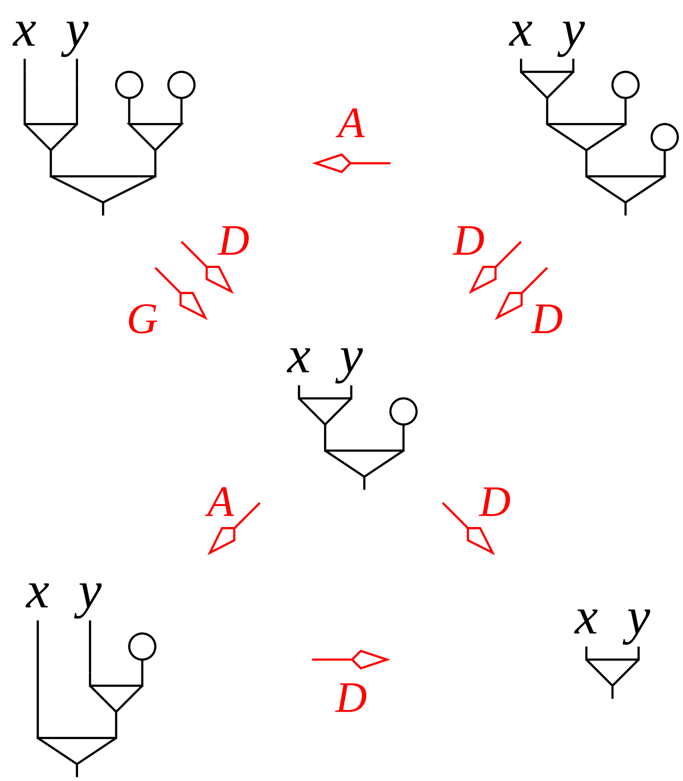
- Opérateurs (Σ) :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$

Un système de réécriture associé à la théorie des monoïdes :

- Opérateurs (Σ) :
  - Produit $\mu : 2 \rightarrow 1$
  - Unité $\eta : 0 \rightarrow 1$
- Règles (R_0) :
  - Associativité $\mu(\mu(x,y),z) \rightarrow_A \mu(x,\mu(y,z))$
  - Neutre à gauche $\mu(\eta,x) \rightarrow_G x$
  - Neutre à droite $\mu(x,\eta) \rightarrow_D x$

Graphe de réduction dans le système de réécriture (Σ, R_0) :

Graphe de réduction dans le système de réécriture (Σ, R_0) :



Propriétés d'un système de réécriture de termes :

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Terminaison :
  Un système de réécriture *termine* s'il n'existe pas de chemin <u>infini</u> de réduction :

$$u_0 \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_n \to u_{n+1} \to \cdots$$

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Terminaison :
  Un système de réécriture *termine* s'il n'existe pas de chemin infini de réduction :

$$u_0 \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_n \to u_{n+1} \to \cdots$$

Conséquence :
Tout terme u possède <u>au moins</u> une *forme normale* $\hat{u}$:

$$u \twoheadrightarrow \hat{u} \quad \text{et} \quad \hat{u} \text{ est irréductible.}$$

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Confluence :

  Un système de réécriture est *confluent* si tout diagramme de la forme
  $$\begin{tikzcd} u \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & v \\ w & \end{tikzcd}$$
  peut être fermé :
  $$\begin{tikzcd} u \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & v \arrow[d, two heads] \\ w \arrow[r, two heads] & t \end{tikzcd}$$

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Confluence :

  Un système de réécriture est *confluent* si tout diagramme de la forme $\begin{tikzcd} u \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & v \\ w & \end{tikzcd}$ peut être fermé : $\begin{tikzcd} u \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & v \arrow[d, two heads] \\ w \arrow[r, two heads] & t \end{tikzcd}$

  Conséquence :

  Tout terme possède <u>au plus</u> une forme normale.

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Convergence :
  Un système de réécriture est *convergent* s'il termine et s'il est confluent.

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Convergence :
  Un système de réécriture est *convergent* s'il termine et s'il est confluent.

  Conséquence :
  Tout terme possède <u>exactement</u> une forme normale.

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Convergence :

  Un système de réécriture est *convergent* s'il termine et s'il est confluent.

  Conséquence :

  Tout terme possède exactement une forme normale.

  Conséquence :

  Une procédure pour décider si deux termes sont égaux.

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Convergence :

  Un système de réécriture est *convergent* s'il termine et s'il est confluent.

  Conséquence :

  Tout terme possède exactement une forme normale.

  Conséquence :

  Une procédure pour décider si deux termes sont égaux.

$$u \qquad v$$

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Convergence :

  Un système de réécriture est *convergent* s'il termine et s'il est confluent.

  Conséquence :

  Tout terme possède exactement une forme normale.

  Conséquence :

  Une procédure pour décider si deux termes sont égaux.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[d, ->>] & v \arrow[d, ->>] \\ \hat{u} & \hat{v} \end{tikzcd}$$

Propriétés d'un système de réécriture de termes :

- Convergence :

  Un système de réécriture est *convergent* s'il termine et s'il est confluent.

  Conséquence :

  Tout terme possède exactement une forme normale.

  Conséquence :

  Une procédure pour décider si deux termes sont égaux.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[d, ->>] & & v \arrow[d, ->>] \\ \hat{u} & =? & \hat{v} \end{tikzcd}$$

La théorie des monoïdes commutatifs :

La théorie des monoïdes commutatifs :

- Opérateurs :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$

La théorie des monoïdes commutatifs :

- Opérateurs :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$
- Équations :
  - Associativité $\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z))$
  - Neutre à gauche $\mu(\eta,x) = x$
  - Neutre à droite $\mu(x,\eta) = x$
  - Commutativité $\mu(x,y) = \mu(y,x)$

La théorie des monoïdes commutatifs :

- Opérateurs :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$
- Équations :
  - Associativité $\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z))$
  - Neutre à gauche $\mu(\eta, x) = x$
  - Neutre à droite $\mu(x, \eta) = x$
  - Commutativité $\mu(x, y) = \mu(y, x)$

Un système de réécriture de termes associé à la théorie des monoïdes commutatifs :

Un système de réécriture de termes associé à la théorie des monoïdes commutatifs :

- Opérateurs (Σ) :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$

Un système de réécriture de termes associé à la théorie des monoïdes commutatifs :

- Opérateurs (Σ) :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$
- Règles (R_1) :
  - Associativité $\mu(\mu(x,y),z) \to_A \mu(x,\mu(y,z))$
  - Neutre à gauche $\mu(\eta,x) \to_G x$
  - Neutre à droite $\mu(x,\eta) \to_D x$
  - Commutativité $\mu(x,y) \to_C \mu(y,x)$

Un système de réécriture de termes associé à la théorie des monoïdes commutatifs :

- Opérateurs (Σ) :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$
- Règles (R_1) :
  - Associativité $\mu(\mu(x, y), z) \to_A \mu(x, \mu(y, z))$
  - Neutre à gauche $\mu(\eta, x) \to_G x$
  - Neutre à droite $\mu(x, \eta) \to_D x$
  - Commutativité $\mu(x, y) \to_C \mu(y, x)$

Chemin infini dans (Σ, R_1) :

Chemin infini dans (Σ, R_1) :

$$\mu(u, v)$$

Chemin infini dans (Σ, R_1) :

$$\mu(u, v) \rightarrow_C \mu(v, u)$$

Règle de commutativité :

$$\mu(x, y) \rightarrow_C \mu(y, x)$$

Chemin infini dans (Σ, R_1) :

$$\mu(u,v) \rightarrow_C \ \mu(v,u) \rightarrow_C \ \mu(u,v)$$

Règle de commutativité :

$$\mu(x,y) \rightarrow_C \ \mu(y,x)$$

Chemin infini dans (Σ, R_1) :

$$\mu(u,v) \rightarrow_C \ \mu(v,u) \rightarrow_C \ \mu(u,v) \rightarrow_C \ \mu(v,u) \ \rightarrow_C \ \cdots$$

Règle de commutativité :

$$\mu(x,y) \rightarrow_C \ \mu(y,x)$$

La théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

La théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

- Opérateurs :
  - Produit $\quad \mu : 2 \rightarrow 1$
  - Unité $\quad \eta : 0 \rightarrow 1$

La théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

- Opérateurs :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$
- Équations :
  - Associativité $\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z))$
  - Neutre à gauche $\mu(\eta,x) = x$
  - Neutre à droite $\mu(x,\eta) = x$
  - Commutativité $\mu(x,y) = \mu(y,x)$
  - Auto-inverse $\mu(x,x) = \eta$

La théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

- Opérateurs :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$
- Équations :
  - Associativité $\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z))$
  - Neutre à gauche $\mu(\eta,x) = x$
  - Neutre à droite $\mu(x,\eta) = x$
  - Commutativité $\mu(x,y) = \mu(y,x)$
  - Auto-inverse $\mu(x,x) = \eta$

Un système de réécriture de termes associé à la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

Un système de réécriture de termes associé à la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

- Opérateurs (Σ) :
  - Produit $\mu : 2 \to 1$
  - Unité $\eta : 0 \to 1$

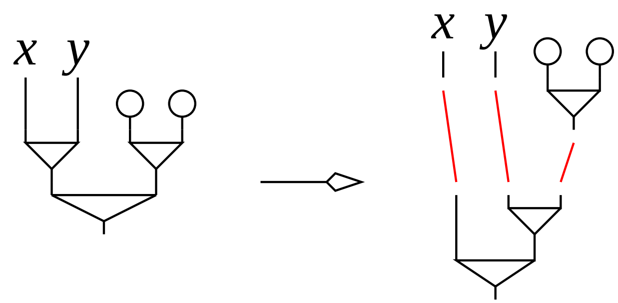
Un système de réécriture de termes associé à la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

- Opérateurs (Σ) :
  - Produit $\quad \mu : 2 \to 1$
  - Unité $\quad \eta : 0 \to 1$
- Règles (R_2) :
  - Associativité $\quad \mu(\mu(x,y),z) \to_A \mu(x,\mu(y,z))$
  - Neutre à gauche $\quad \mu(\eta,x) \to_G x$
  - Neutre à droite $\quad \mu(x,\eta) \to_D x$
  - Commutativité $\quad \mu(x,y) \to_C \mu(y,x)$
  - Auto-inverse $\quad \mu(x,x) \to_I \eta$

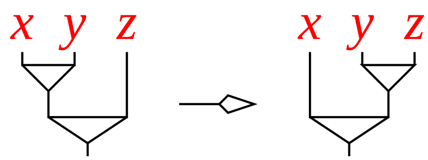
Gestion des ressources

Rappel :

Rappel :



Règle d'associativité :



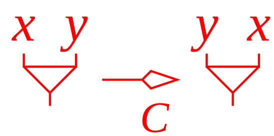
Opérations de gestion des ressources :

Opérations de gestion des ressources :

- Permutation :

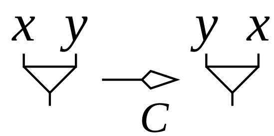
Opérations de gestion des ressources :

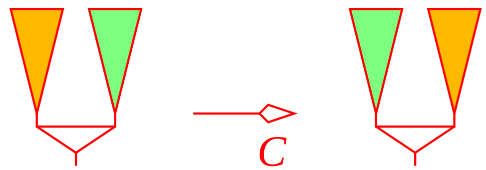
- Permutation :



Opérations de gestion des ressources :

- Permutation :





Opérations de gestion des ressources :

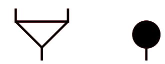
- Effacement :

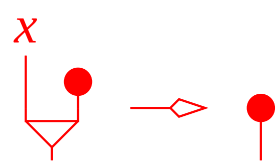
Opérations de gestion des ressources :

- Effacement :

Opérations de gestion des ressources :

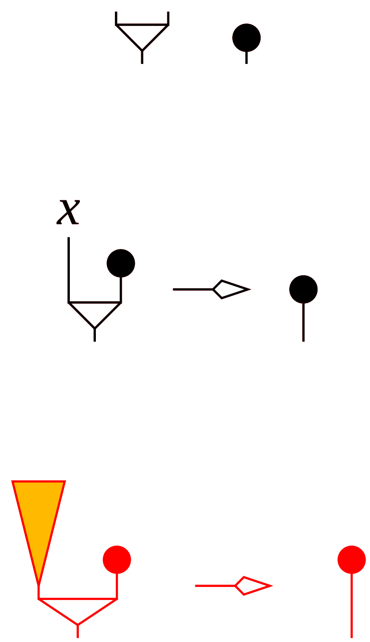
- Effacement :





Opérations de gestion des ressources :

- Effacement :



Opérations de gestion des ressources :

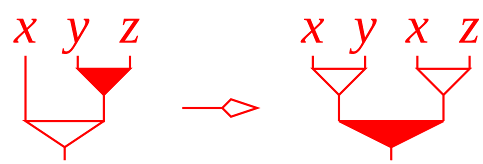
- Duplication :

Opérations de gestion des ressources :

- Duplication :

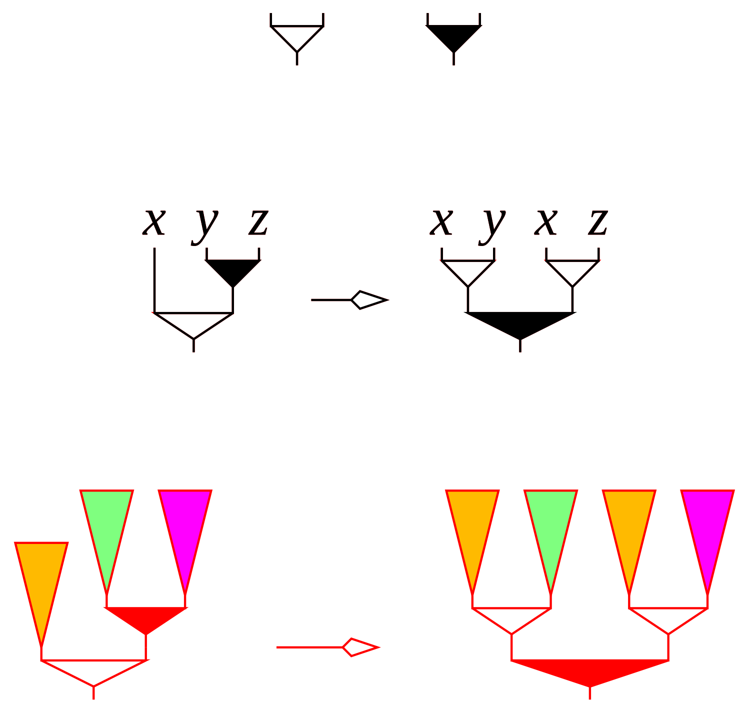
Opérations de gestion des ressources :

- Duplication :



Opérations de gestion des ressources :

- Duplication :

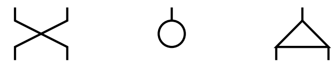


Opérateurs de gestion des ressources (Δ) :

Opérateurs de gestion des ressources (Δ) :

τ ε δ

Opérateurs de gestion des ressources (Δ) :



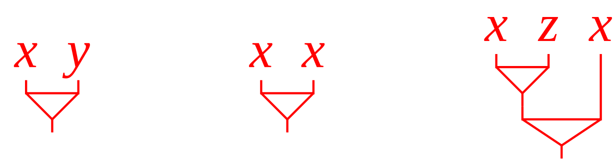
$\tau \quad \varepsilon \quad \delta$

Interprétations souhaitées :

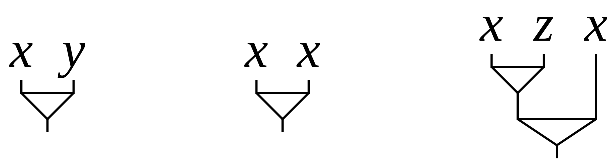
- $\tau(x, y) = (y, x)$
- $\varepsilon(x) = *$
- $\delta(x) = (x, x)$

Des variables aux opérateurs de gestion des ressources :

Des variables aux opérateurs de gestion des ressources :



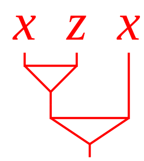
Des variables aux opérateurs de gestion des ressources :



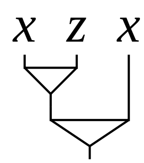
Opérations formelles représentées par ces termes :

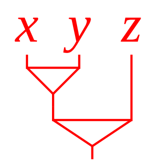
$$(x, y) \mapsto \mu(x, y), \quad x \mapsto \mu(x, x), \quad (x, y, z) \mapsto \mu(\mu(x, z), x).$$

Des variables aux opérateurs de gestion des ressources :

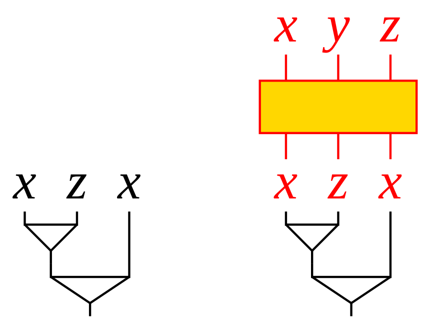


Des variables aux opérateurs de gestion des ressources :

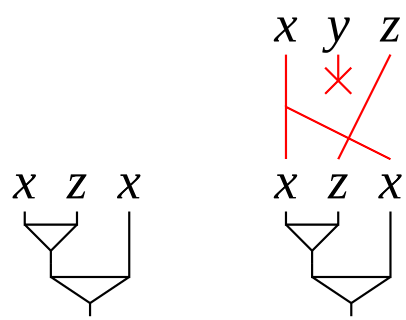




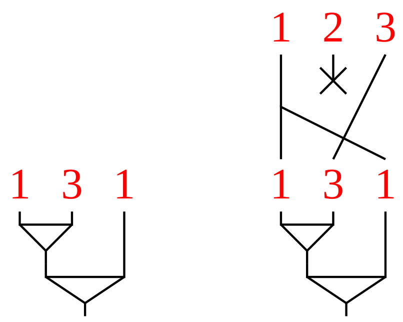
Des variables aux opérateurs de gestion des ressources :



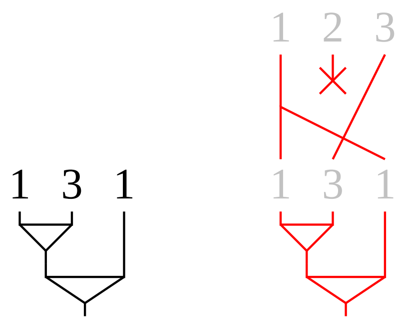
Des variables aux opérateurs de gestion des ressources :



Des variables aux opérateurs de gestion des ressources :

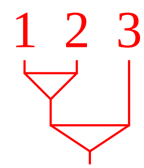


Des variables aux opérateurs de gestion des ressources :

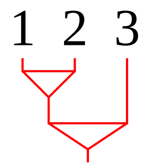


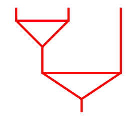
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :



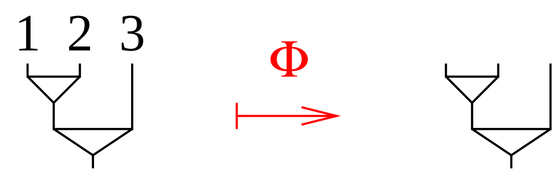
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :



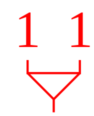


Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :



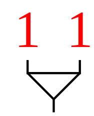
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

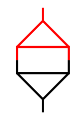


Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

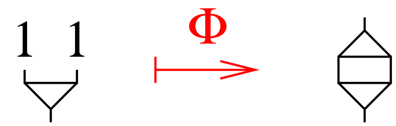
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

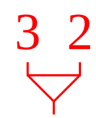




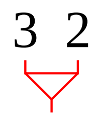
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

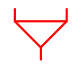


Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

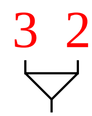


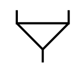
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :





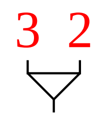
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

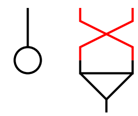




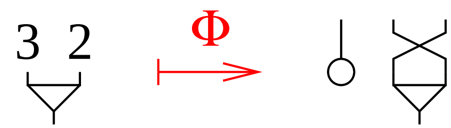
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

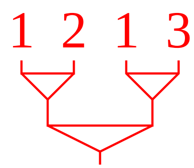




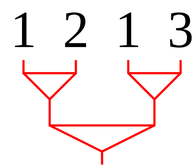
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

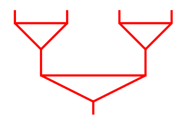


Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

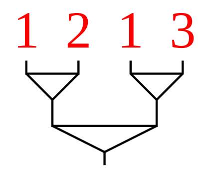


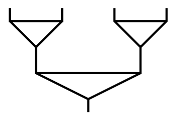
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :



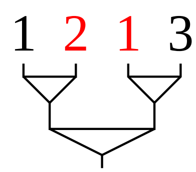


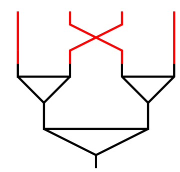
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :





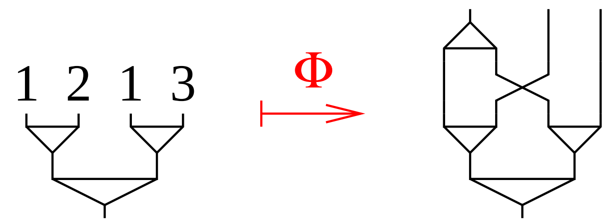
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :





Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

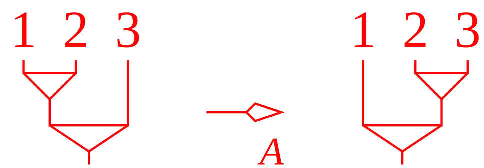
Exemples de traduction de termes de la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :



Traduction des règles de (Σ, R_2) :

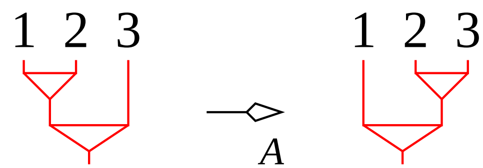
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Associativité :



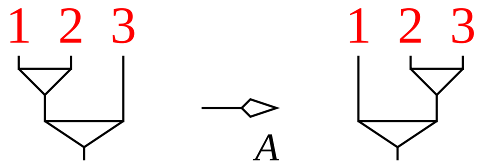
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Associativité :



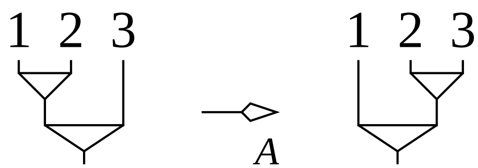
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

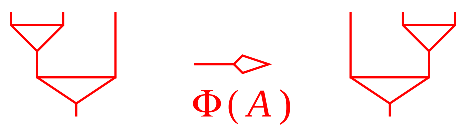
- Associativité :



Traduction des règles de (Σ, R_2) :

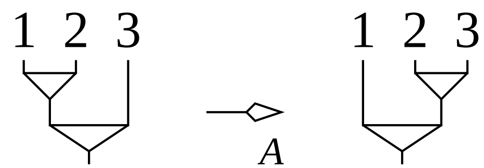
- Associativité :

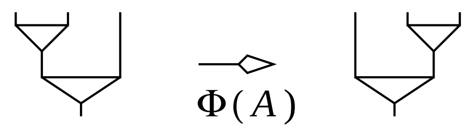




Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Associativité :

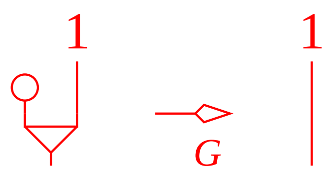




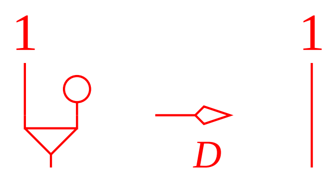
C'est une règle <u>linéaire</u>.

Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Neutre à gauche :

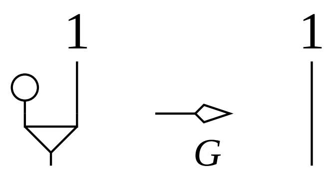


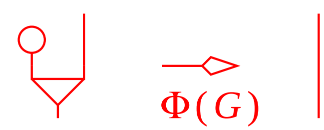
- Neutre à droite :



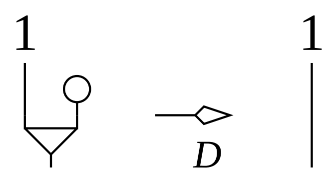
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

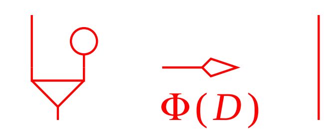
- Neutre à gauche :





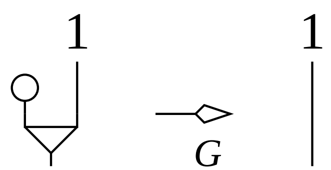
- Neutre à droite :

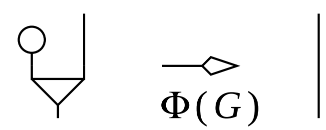




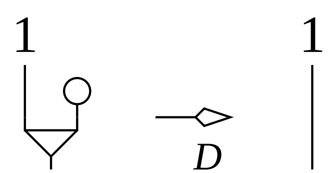
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

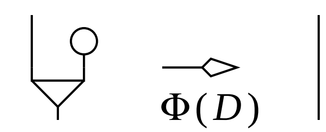
- Neutre à gauche :





- Neutre à droite :

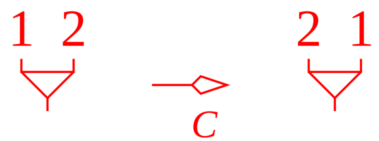




Ce sont des règles <u>linéaires</u>.

Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Commutativité :

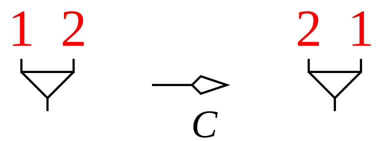


Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Commutativité :

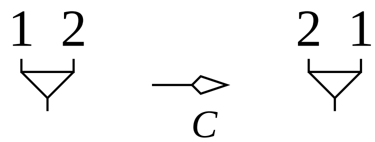
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

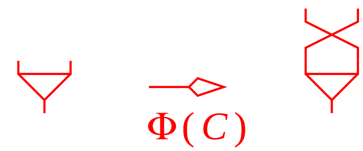
- Commutativité :



Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Commutativité :





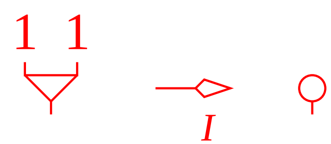
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Commutativité :

C'est une règle linéaire à gauche mais pas à droite.

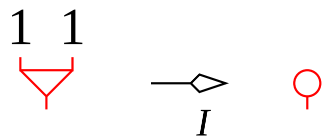
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Auto-inverse :



Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Auto-inverse :

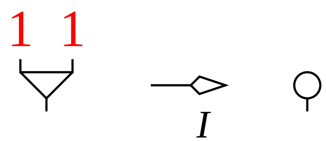


Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Auto-inverse :

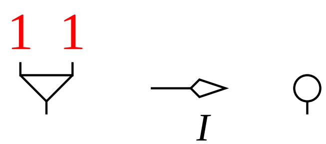
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Auto-inverse :



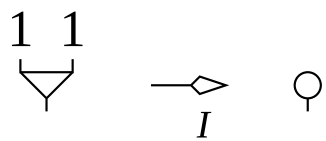
Traduction des règles de (Σ, R_2) :

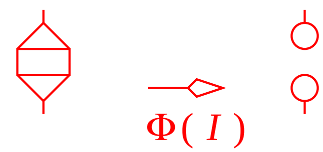
- Auto-inverse :



Traduction des règles de (Σ, R_2) :

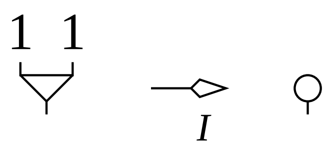
- Auto-inverse :

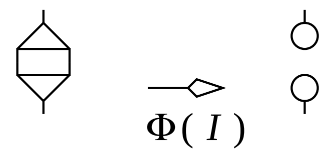




Traduction des règles de (Σ, R_2) :

- Auto-inverse :



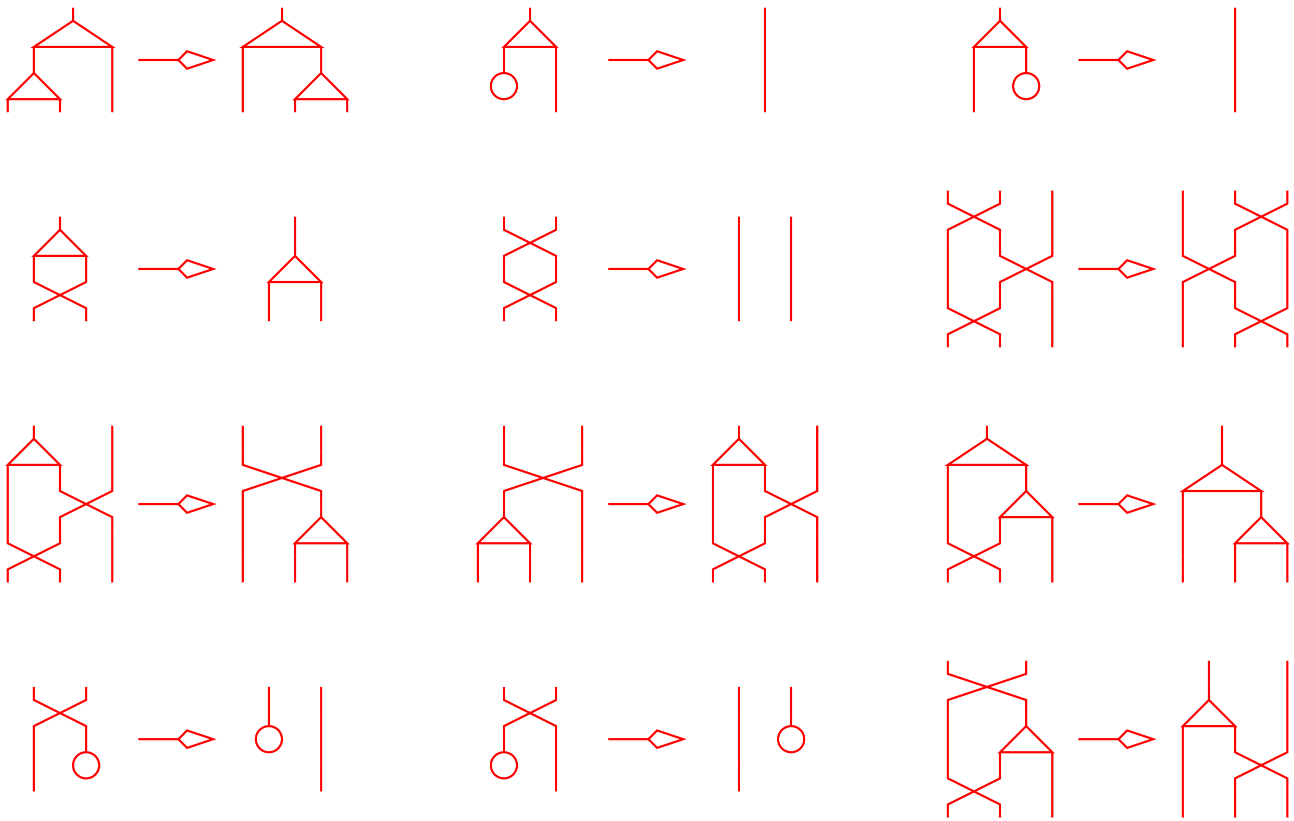


C'est une règle qui n'est linéaire ni à gauche ni à droite.

Règles supplémentaires $(R_{\Delta,\Sigma})$:

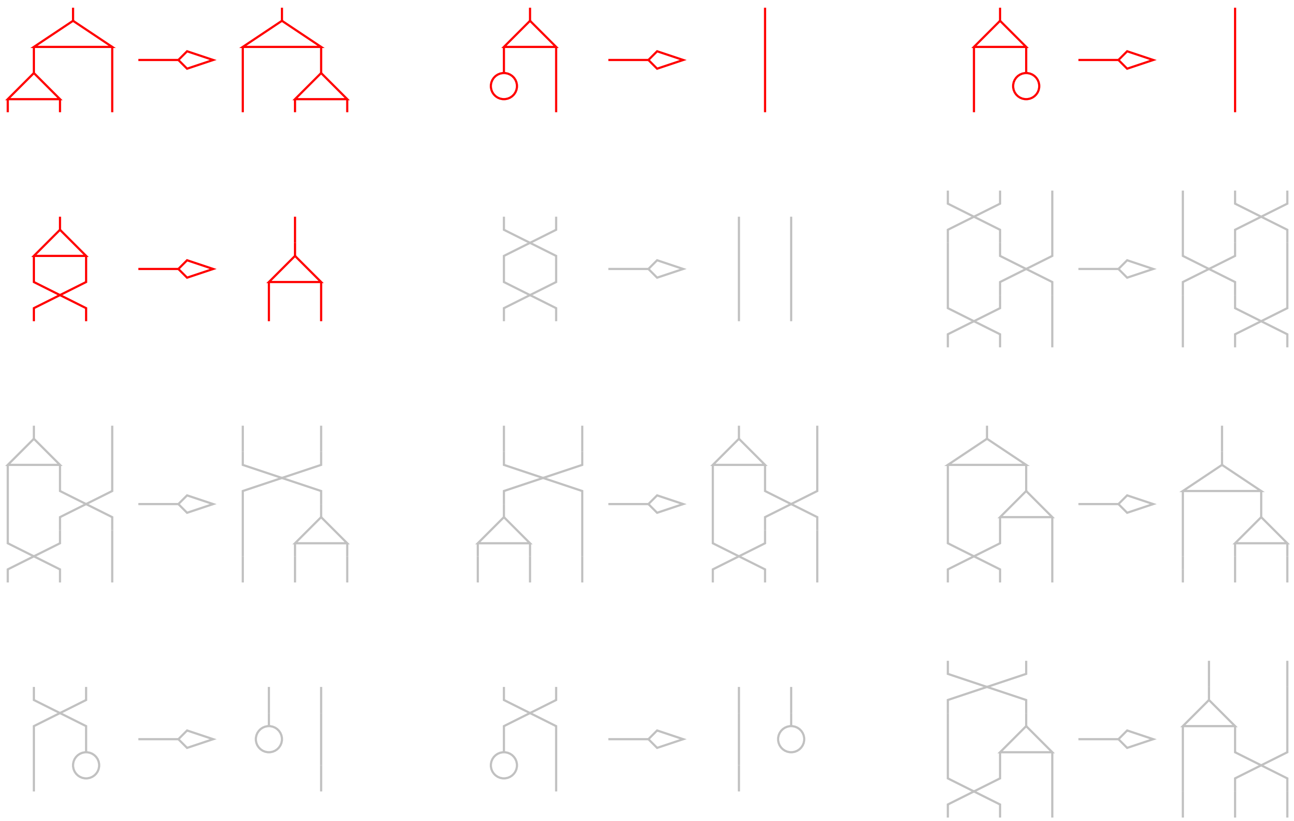
Règles supplémentaires $(R_{\Delta,\Sigma})$:

- Première famille (R_Δ) :



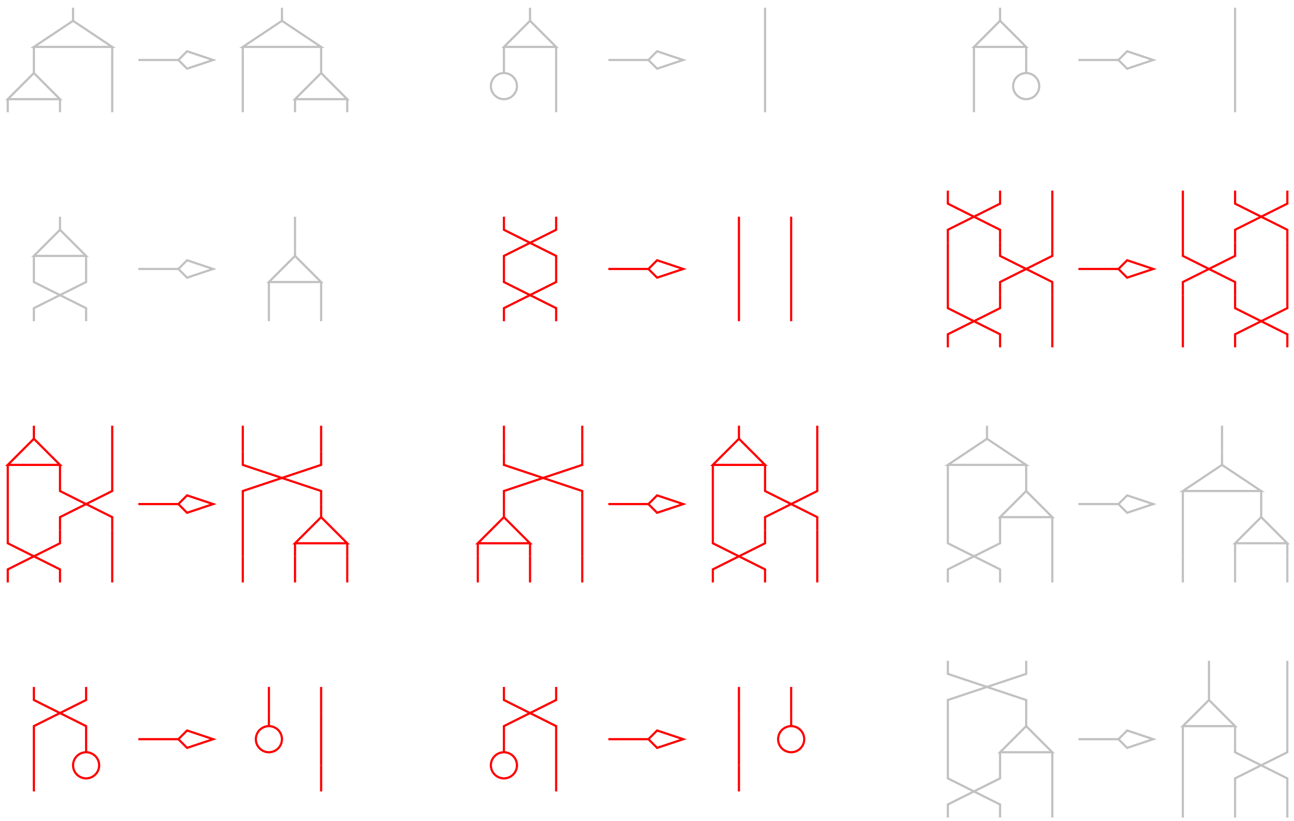
Règles supplémentaires ($R_{\Delta,\Sigma}$) :

- Première famille (R_Δ) :



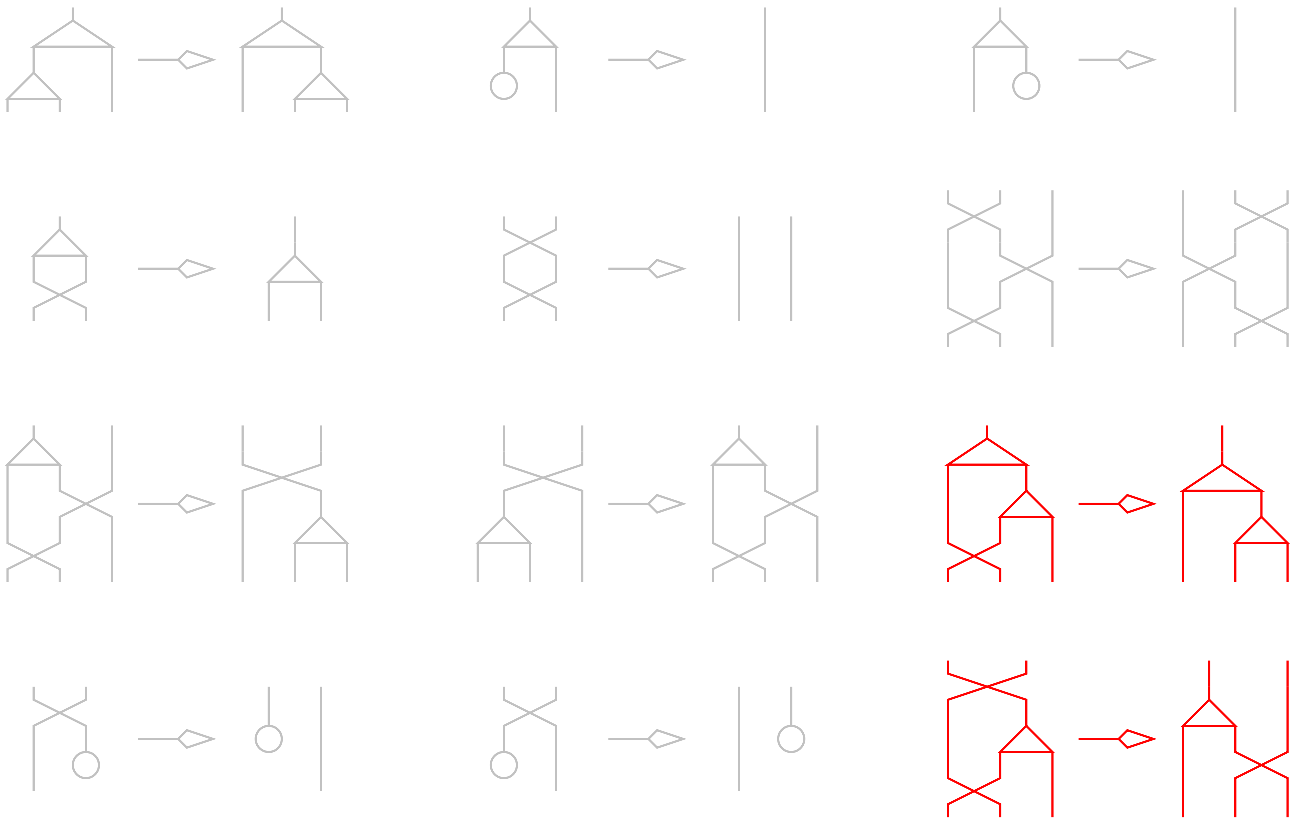
Règles supplémentaires $(R_{\Delta,\Sigma})$:

- Première famille (R_{Δ}) :



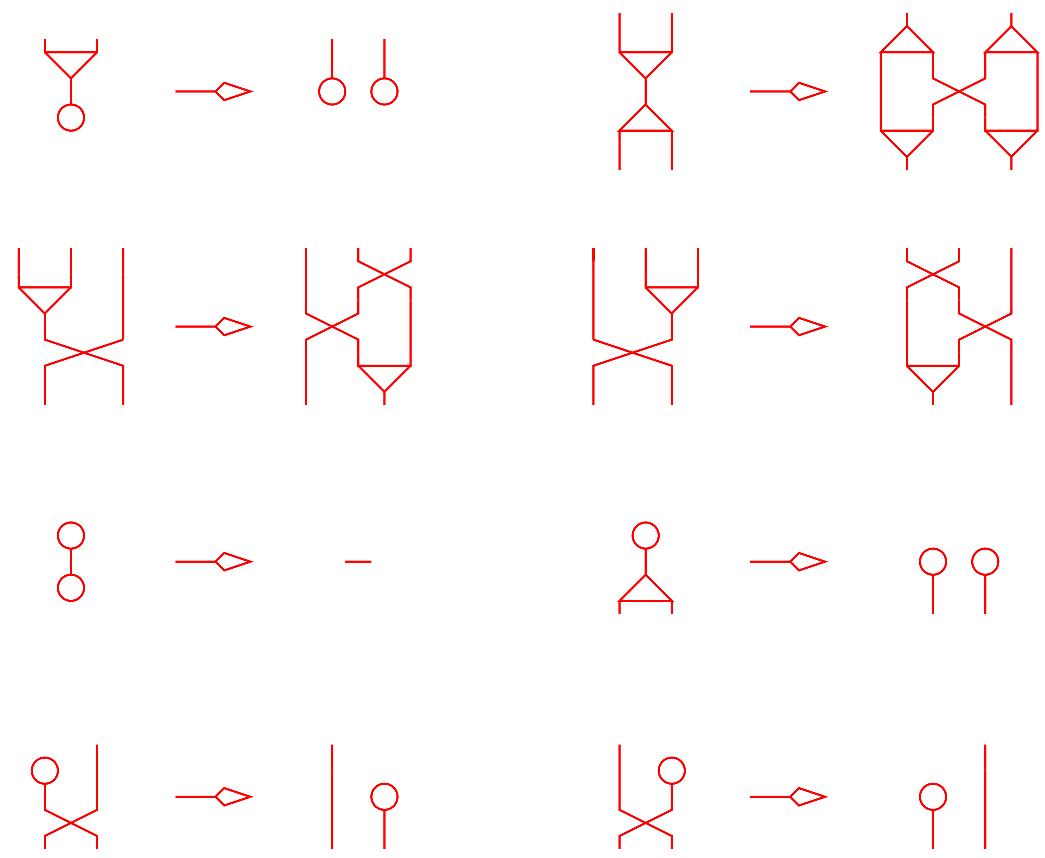
Règles supplémentaires $(R_{\Delta,\Sigma})$:

- Première famille (R_{Δ}) :



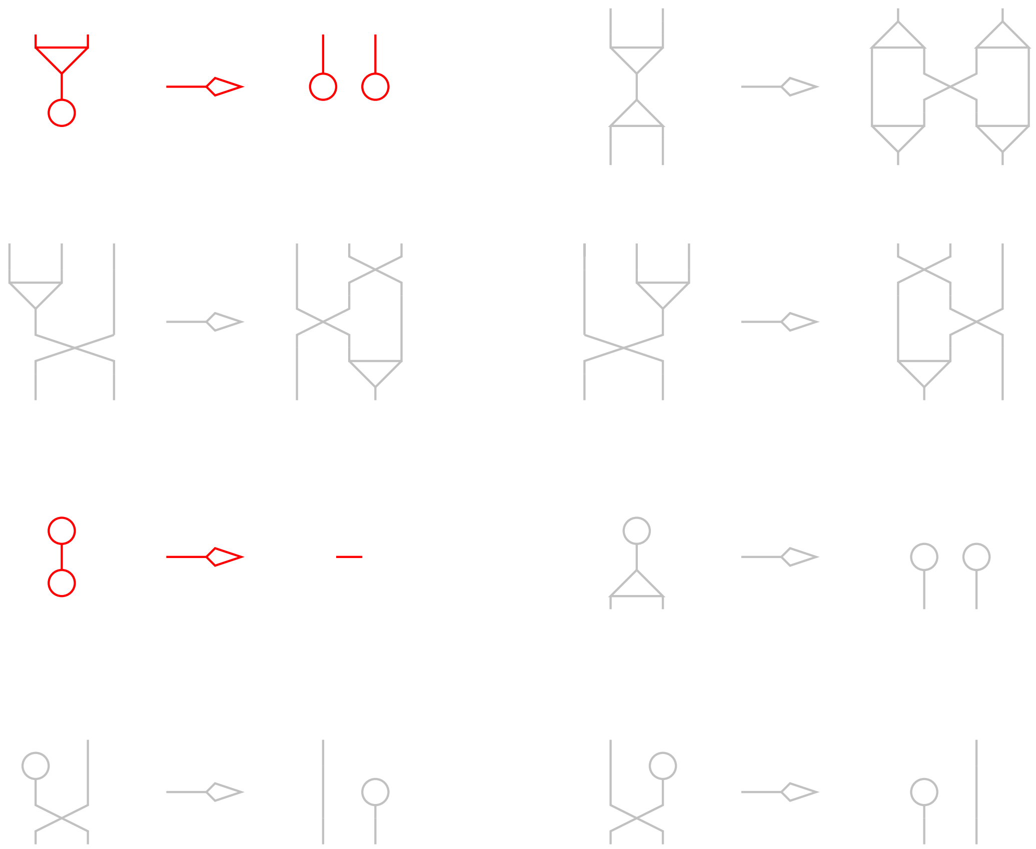
Règles supplémentaires ($R_{\Delta,\Sigma}$) :

- Seconde famille ($R_{\Sigma/\Delta}$) :



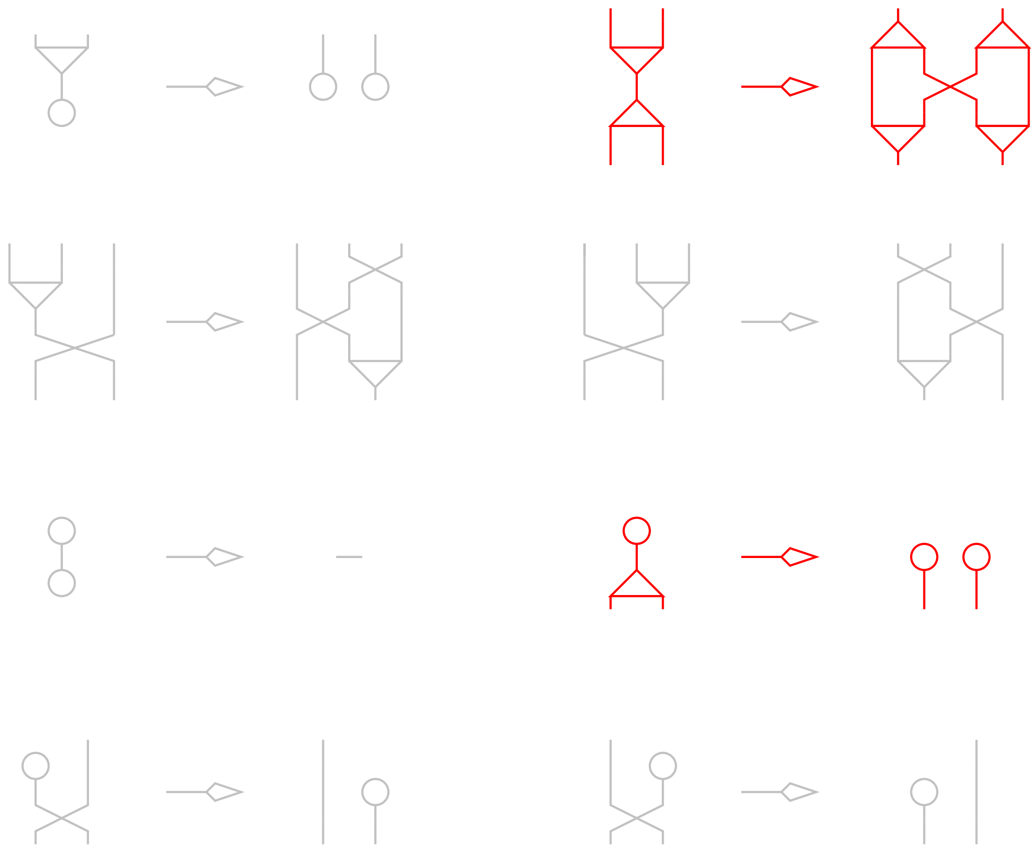
Règles supplémentaires ($R_{\Delta,\Sigma}$) :

- Seconde famille ($R_{\Sigma/\Delta}$) :



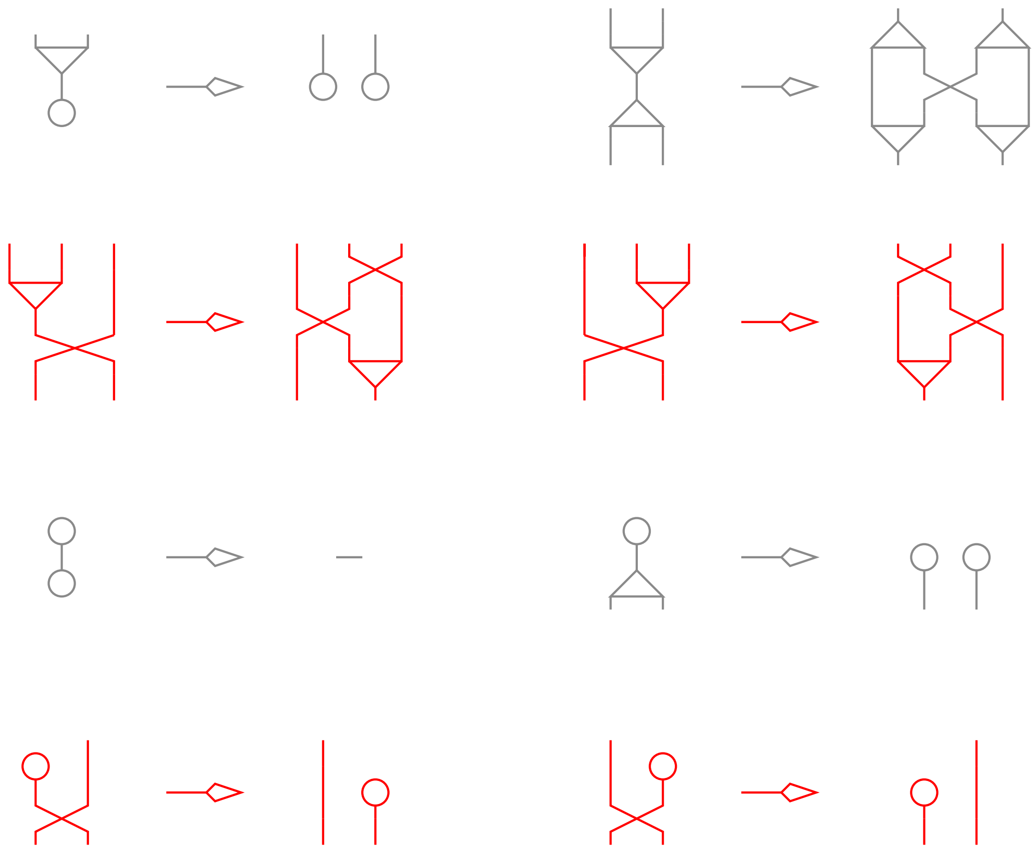
Règles supplémentaires $(R_{\Delta,\Sigma})$:

- Seconde famille $(R_{\Sigma/\Delta})$:



Règles supplémentaires $(R_{\Delta,\Sigma})$:

- Seconde famille $(R_{\Sigma/\Delta})$:



À partir du système de réécriture de termes (Σ, R_2), on a construit une présentation (Σ^c, R_2^c) avec 5 opérateurs et 25 règles :

$$\Sigma^c = \Sigma \amalg \Delta \quad \text{et} \quad R_2^c = \Phi(R_2) \amalg R_{\Delta,\Sigma}.$$

À partir du système de réécriture de termes (Σ, R_2), on a construit une présentation (Σ^c, R_2^c) avec 5 opérateurs et 25 règles :

$$\Sigma^c = \Sigma \amalg \Delta \quad \text{et} \quad R_2^c = \Phi(R_2) \amalg R_{\Delta,\Sigma}.$$

Généralisation :

Si on a un système de réécriture de termes (Ω, R) avec m opérateurs et n règles, on peut construire (Ω^c, R^c), une présentation à $m+3$ opérateurs et $n + 12 + 2m$ règles.

Question 1 :

Quels sont les liens entre les propriétés calculatoires de (Ω, R) et celles de (Ω^c, R^c) ?

Question 1 :

Quels sont les liens entre les propriétés calculatoires de (Ω, R) et celles de (Ω^c, R^c) ?

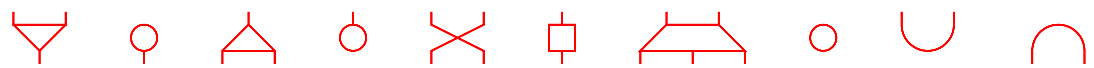
Question 2 :

Qu'est-ce que (Ω^c, R^c) ?

Présentations d'opérades :

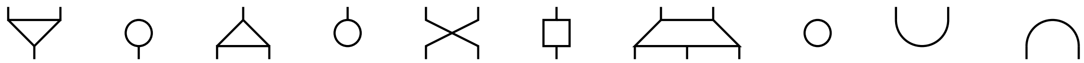
Présentations d'opérades :

- Exemples de générateurs (opérateurs) :

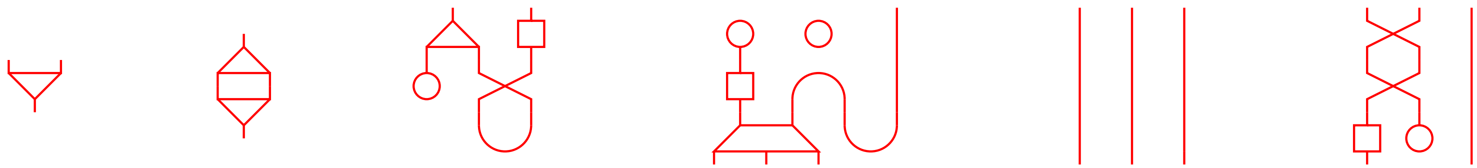


Présentations d'opérades :

- Exemples de générateurs (opérateurs) :



- Exemples de « termes » (diagrammes, circuits, flèches) :



Présentations d'opérades :

- Règles :

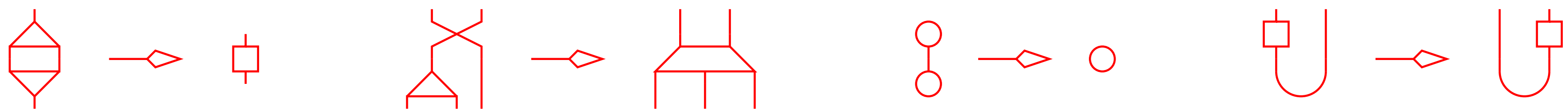
  Une *règle* est un couple $f \to\ g$ avec f et g des flèches <u>parallèles</u>.

Présentations d'opérades :

- Règles :

  Une *règle* est un couple $f \to g$ avec f et g des flèches parallèles.

- Exemples de règles :

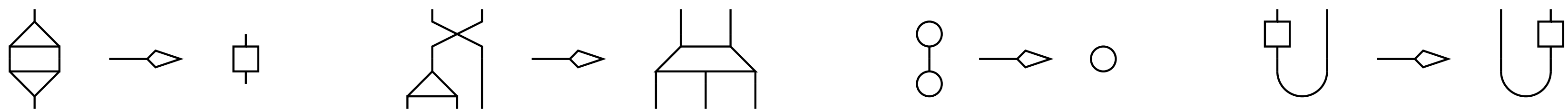


Présentations d'opérades :

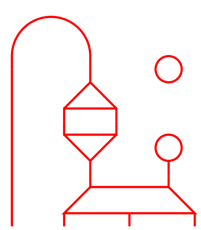
- Règles :

  Une *règle* est un couple $f \to g$ avec f et g des flèches parallèles.

- Exemples de règles :



- Exemple de réduction :

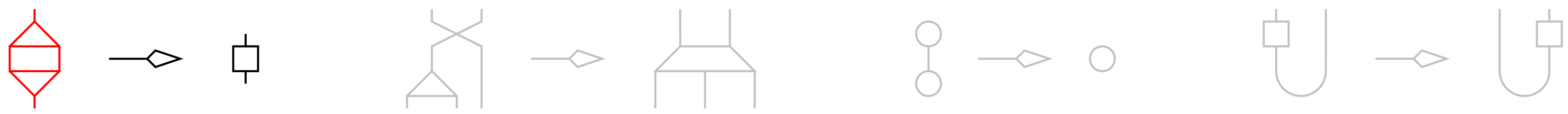


Présentations d'opérades :

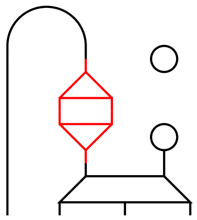
- Règles :

  Une *règle* est un couple $f \to g$ avec f et g des flèches parallèles.

- Exemples de règles :



- Exemple de réduction :

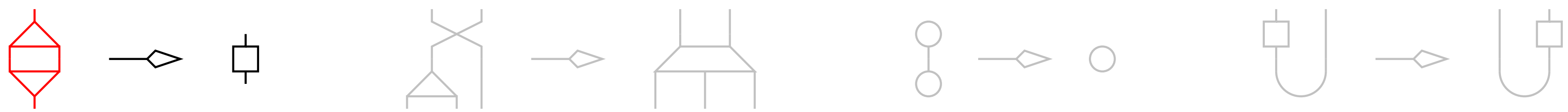


Présentations d'opérades :

- Règles :

  Une *règle* est un couple $f \to g$ avec f et g des flèches parallèles.

- Exemples de règles :



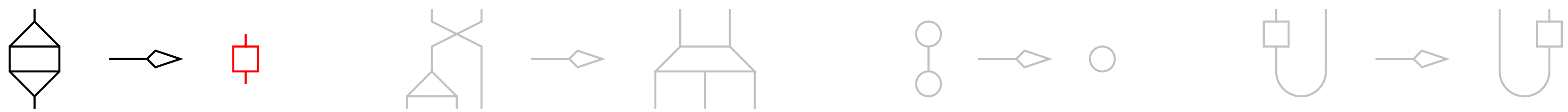
- Exemple de réduction :

Présentations d'opérades :

- Règles :

  Une *règle* est un couple $f \to g$ avec f et g des flèches parallèles.

- Exemples de règles :



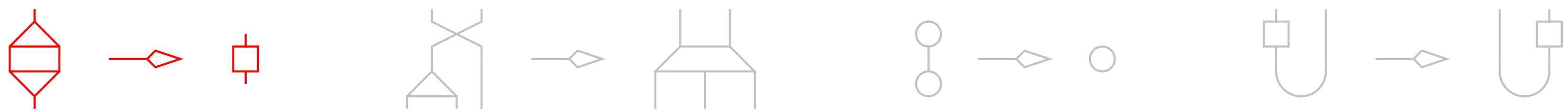
- Exemple de réduction :

Présentations d'opérades :

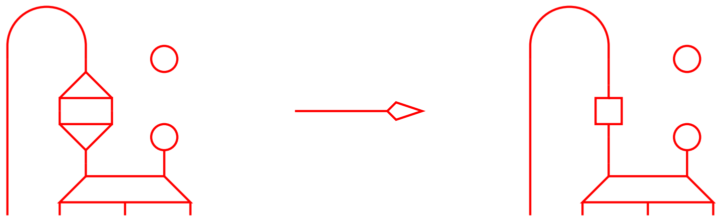
- Règles :

  Une *règle* est un couple $f \to g$ avec f et g des flèches parallèles.

- Exemples de règles :



- Exemple de réduction :



Théorème 1 :

On fixe un système de réécriture de termes (Σ, R) quelconque. Alors :

Théorème 1 :

On fixe un système de réécriture de termes (Σ, R) quelconque. Alors :

- La présentation d'opérade $(\Sigma^c, R_{\Delta,\Sigma})$ est convergente.

Théorème 1 :

On fixe un système de réécriture de termes (Σ, R) quelconque. Alors :

- La présentation d'opérade $(\Sigma^c, R_{\Delta,\Sigma})$ est convergente.

Si, de plus, (Σ, R) est linéaire à gauche :

Théorème 1 :

On fixe un système de réécriture de termes (Σ, R) quelconque. Alors :

- La présentation d'opérade $(\Sigma^c, R_{\Delta,\Sigma})$ est convergente.

Si, de plus, (Σ, R) est linéaire à gauche :

- La traduction Φ préserve les étapes de réduction :

$$\text{si} \quad u \to_\alpha v \quad \text{alors} \quad \Phi(u) \to_{\Phi(\alpha)} f \twoheadrightarrow_{R_{\Delta,\Sigma}} \Phi^u(v).$$

Théorème 1 :

On fixe un système de réécriture de termes (Σ, R) quelconque. Alors :

- La présentation d'opérade $(\Sigma^c, R_{\Delta,\Sigma})$ est convergente.

Si, de plus, (Σ, R) est linéaire à gauche :

- La traduction Φ préserve les étapes de réduction :

$$\text{si} \quad u \to_\alpha v \quad \text{alors} \quad \Phi(u) \to_{\Phi(\alpha)} f \twoheadrightarrow_{R_{\Delta,\Sigma}} \Phi^u(v).$$

- La présentation d'opérade (Σ^c, R^c) termine si et seulement si le système de réécriture de termes (Σ, R) termine.

Théorème 1 :

On fixe un système de réécriture de termes (Σ, R) quelconque. Alors :

- La présentation d'opérade $(\Sigma^c, R_{\Delta,\Sigma})$ est convergente.

Si, de plus, (Σ, R) est linéaire à gauche :

- La traduction Φ préserve les étapes de réduction :

  $$\text{si} \quad u \to_\alpha v \quad \text{alors} \quad \Phi(u) \to_{\Phi(\alpha)} f \twoheadrightarrow_{R_{\Delta,\Sigma}} \Phi^u(v).$$

- La présentation d'opérade (Σ^c, R^c) termine si et seulement si le système de réécriture de termes (Σ, R) termine.
- La présentation d'opérade (Σ^c, R^c) est confluente si et seulement si le système de réécriture de termes (Σ, R) est confluent.

Application au système de réécriture (Σ, R_0) présentant la théorie des monoïdes :

Application au système de réécriture (Σ, R_0) présentant la théorie des monoïdes :

C'est un système de réécriture linéaire à gauche et convergent.

Application au système de réécriture (Σ, R_0) présentant la théorie des monoïdes :

C'est un système de réécriture linéaire à gauche et convergent.

Donc (Σ^c, R_0^c) est une présentation convergente de la théorie des monoïdes *avec gestion explicite des ressources.*

Application au système de réécriture (Σ, R_1) présentant la théorie des monoïdes commutatifs :

Application au système de réécriture (Σ, R_1) présentant la théorie des monoïdes commutatifs :

C'est un système de réécriture linéaire à gauche, qui ne termine pas.

Application au système de réécriture (Σ, R_1) présentant la théorie des monoïdes commutatifs :

C'est un système de réécriture linéaire à gauche, qui ne termine pas.

Donc (Σ^c, R_1^c) est une présentation qui ne termine pas de la théorie des monoïdes commutatifs (avec gestion explicite des ressources).

Application au système de réécriture (Σ, R_2) présentant la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

Application au système de réécriture (Σ, R_2) présentant la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

Ce système de réécriture n'est pas linéaire à gauche.

Application au système de réécriture (Σ, R_2) présentant la théorie des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels :

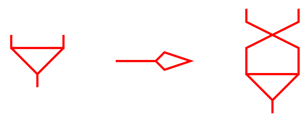
Ce système de réécriture n'est pas linéaire à gauche.

On ne peut donc pas appliquer le théorème à (Σ^c, R_2^c).

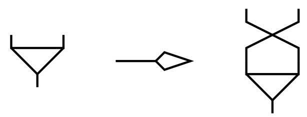
La présentation $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$

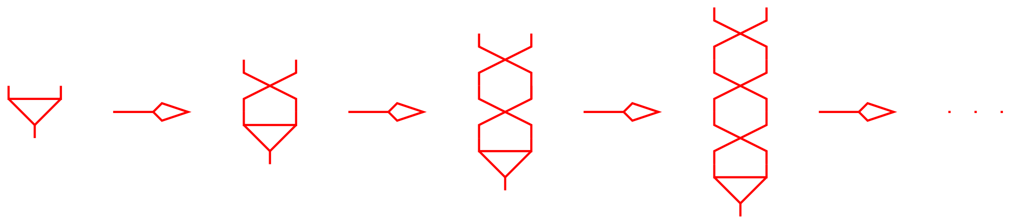
Problème 1 : la présentation (Σ^c, R_2^c) ne termine pas.

Problème 1 : la présentation (Σ^c, R_2^c) ne termine pas.



Problème 1 : la présentation (Σ^c, R_2^c) ne termine pas.

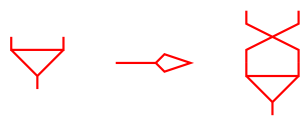




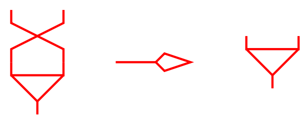
Première modification :

Première modification :

On remplace la règle :

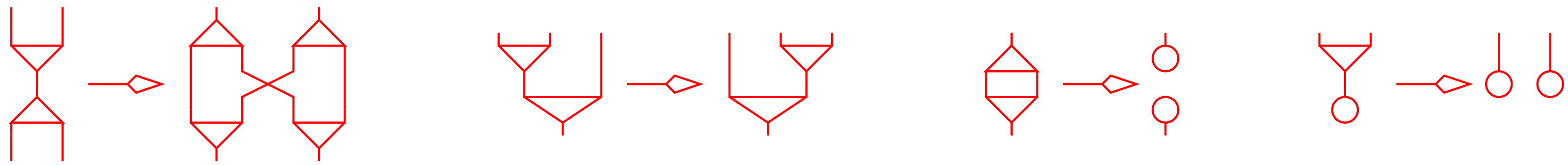


par la règle :

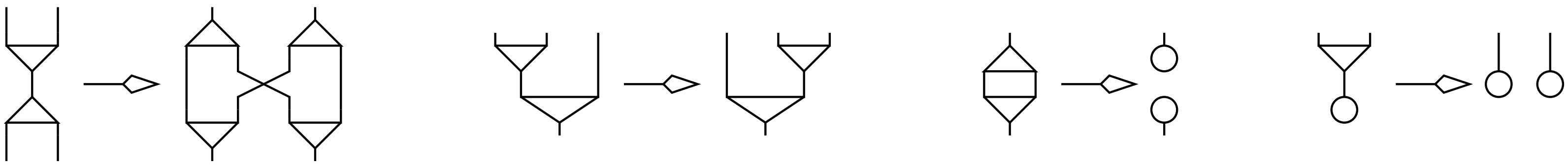


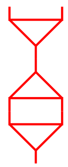
Problème 2 : la présentation (Σ^c, R_2^c) n'est pas confluente.

Problème 2 : la présentation (Σ^c, R_2^c) n'est pas confluente.

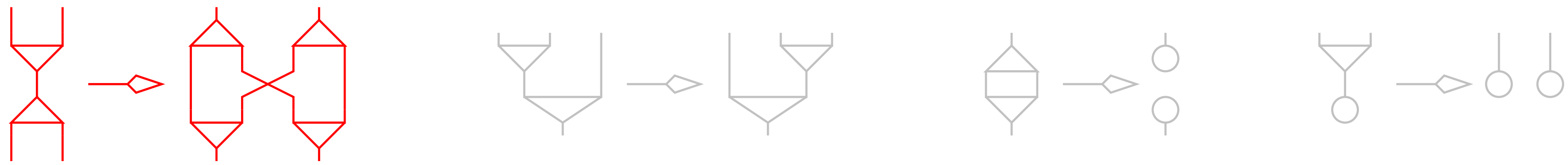


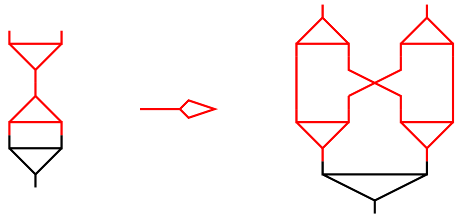
Problème 2 : la présentation (Σ^c, R_2^c) n'est pas confluente.



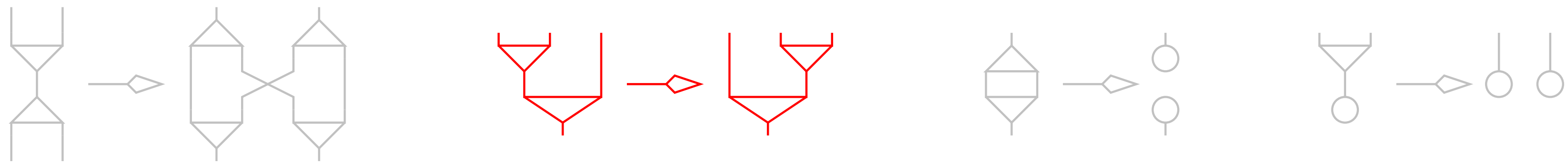


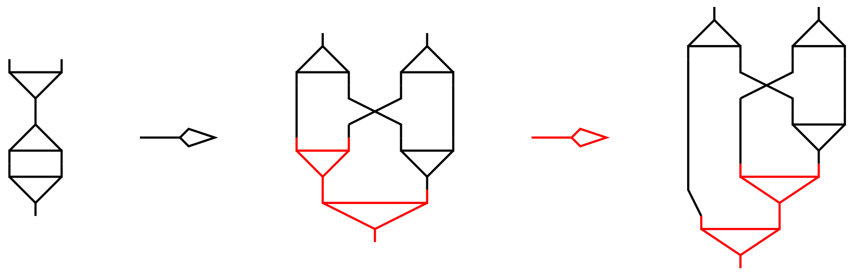
Problème 2 : la présentation (Σ^c, R_2^c) n'est pas confluente.



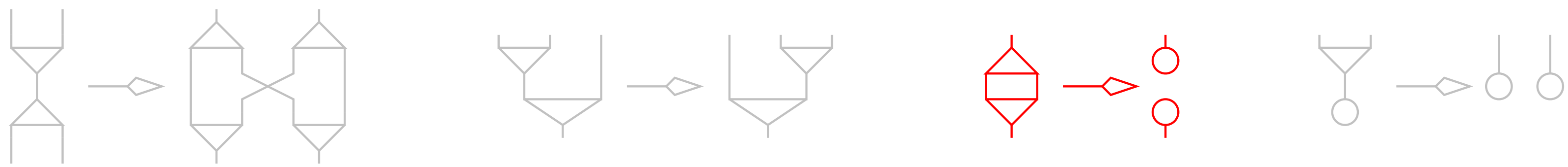


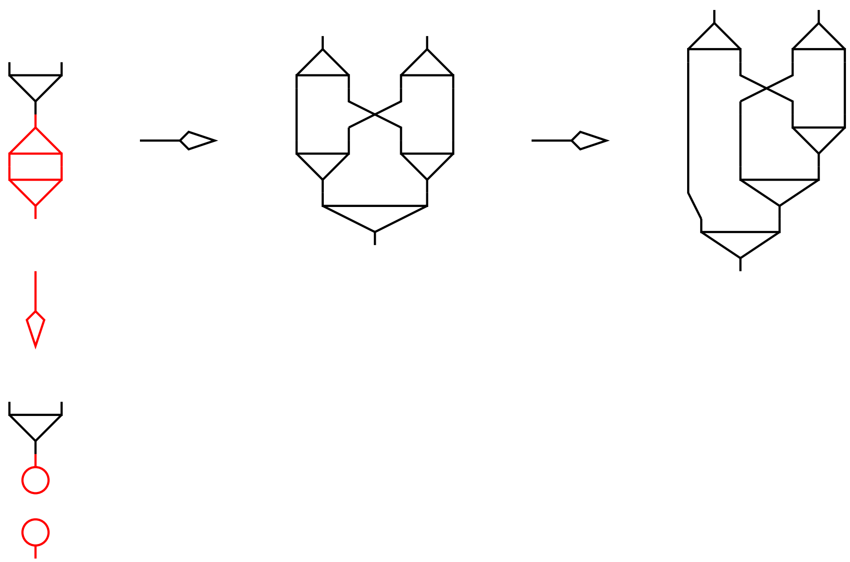
Problème 2 : la présentation (Σ^c, R_2^c) n'est pas confluente.



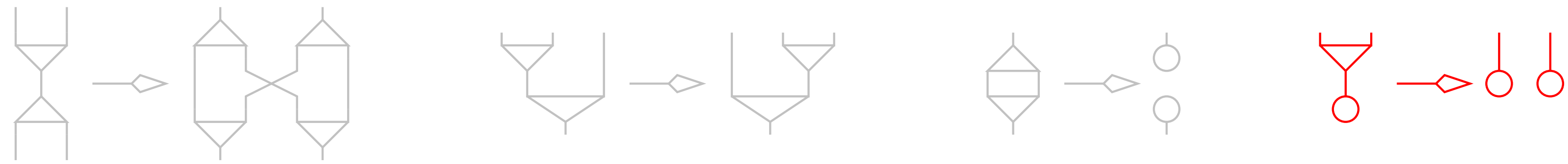


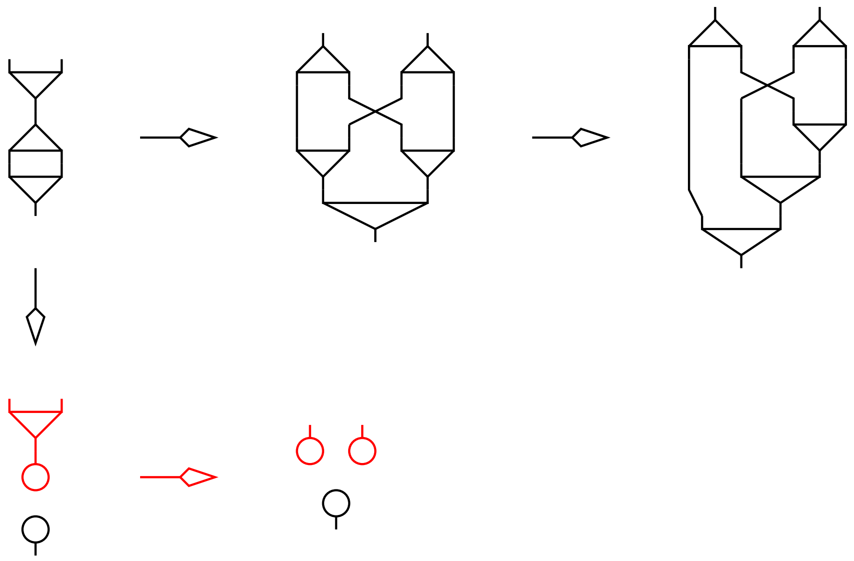
Problème 2 : la présentation (Σ^c, R_2^c) n'est pas confluente.



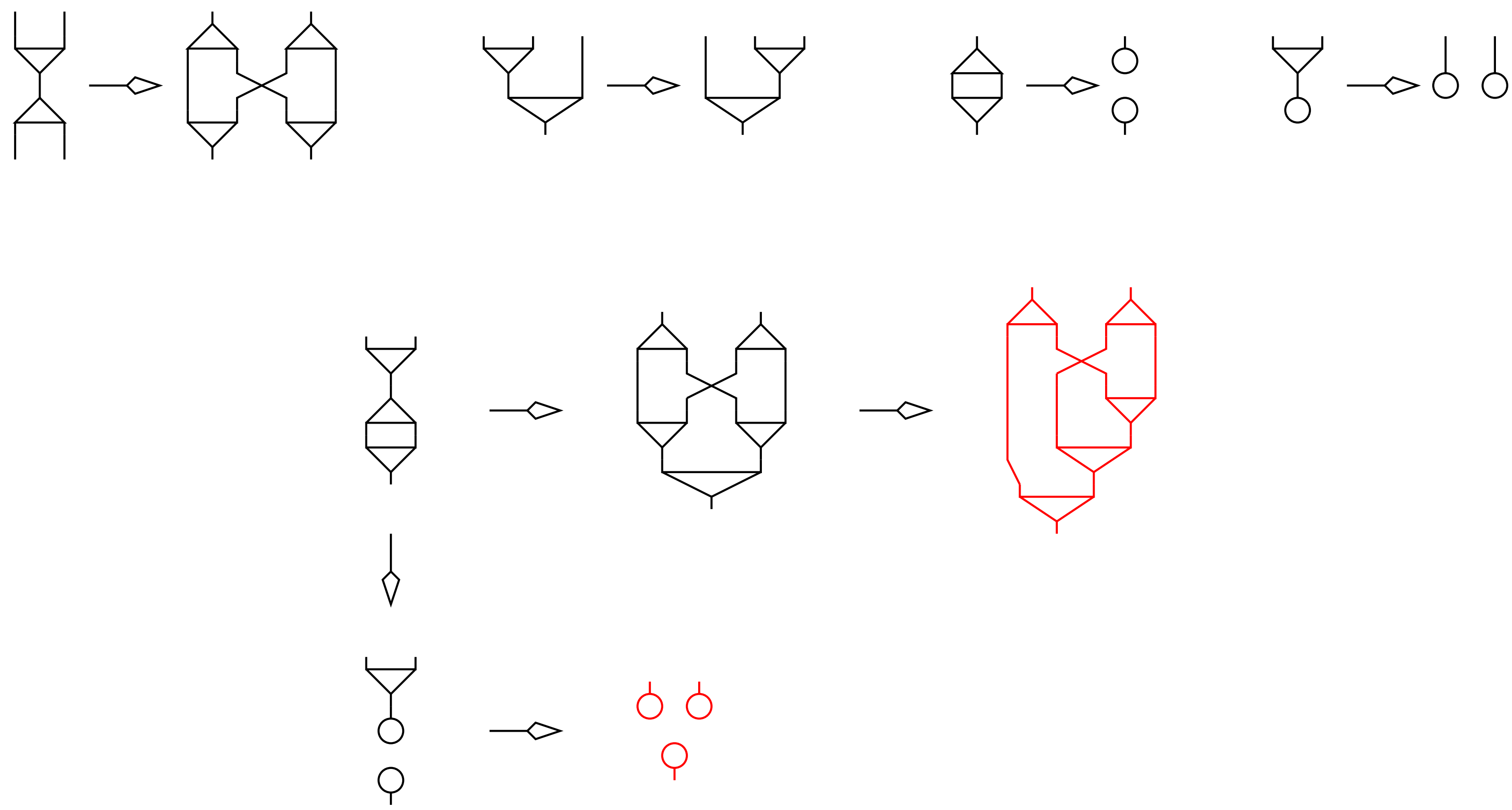


Problème 2 : la présentation (Σ^c, R_2^c) n'est pas confluente.





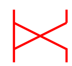
Problème 2 : la présentation (Σ^c, R_2^c) n'est pas confluente.



Deuxième modification :

Deuxième modification :

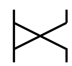
On ajoute un opérateur :



κ

Deuxième modification :

On ajoute un opérateur :

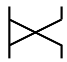


κ

Interprétation : $\kappa(x, y) = (\mu(x, y), x)$.

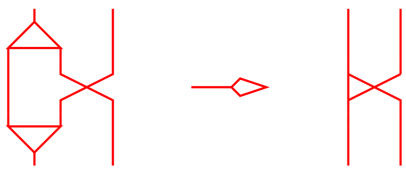
Deuxième modification :

On ajoute un opérateur :



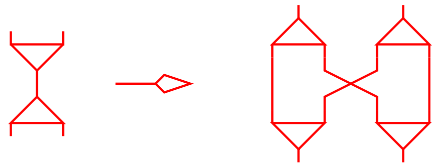
κ

Interprétation : $\kappa(x, y) = (\mu(x, y), x)$. On la spécifie grâce à la règle :

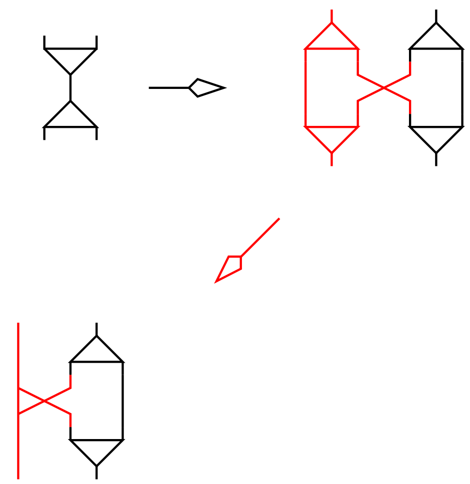


Troisième modification :

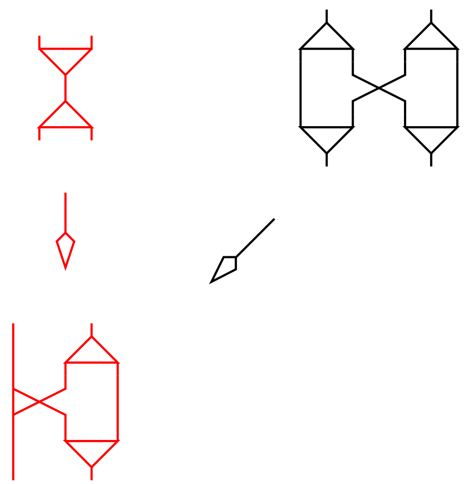
Troisième modification :



Troisième modification :



Troisième modification :



Après plusieurs autres modifications et ajouts de règles, on obtient la présentation appelée $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:

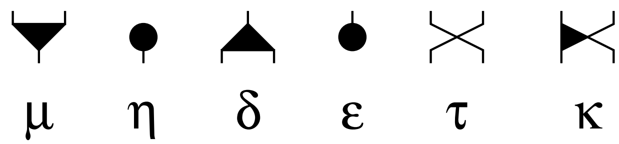
Après plusieurs autres modifications et ajouts de règles, on obtient la présentation appelée $L(\mathbb{Z}_2)$:

- Six opérateurs :

$\mu \quad \eta \quad \delta \quad \varepsilon \quad \tau \quad \kappa$

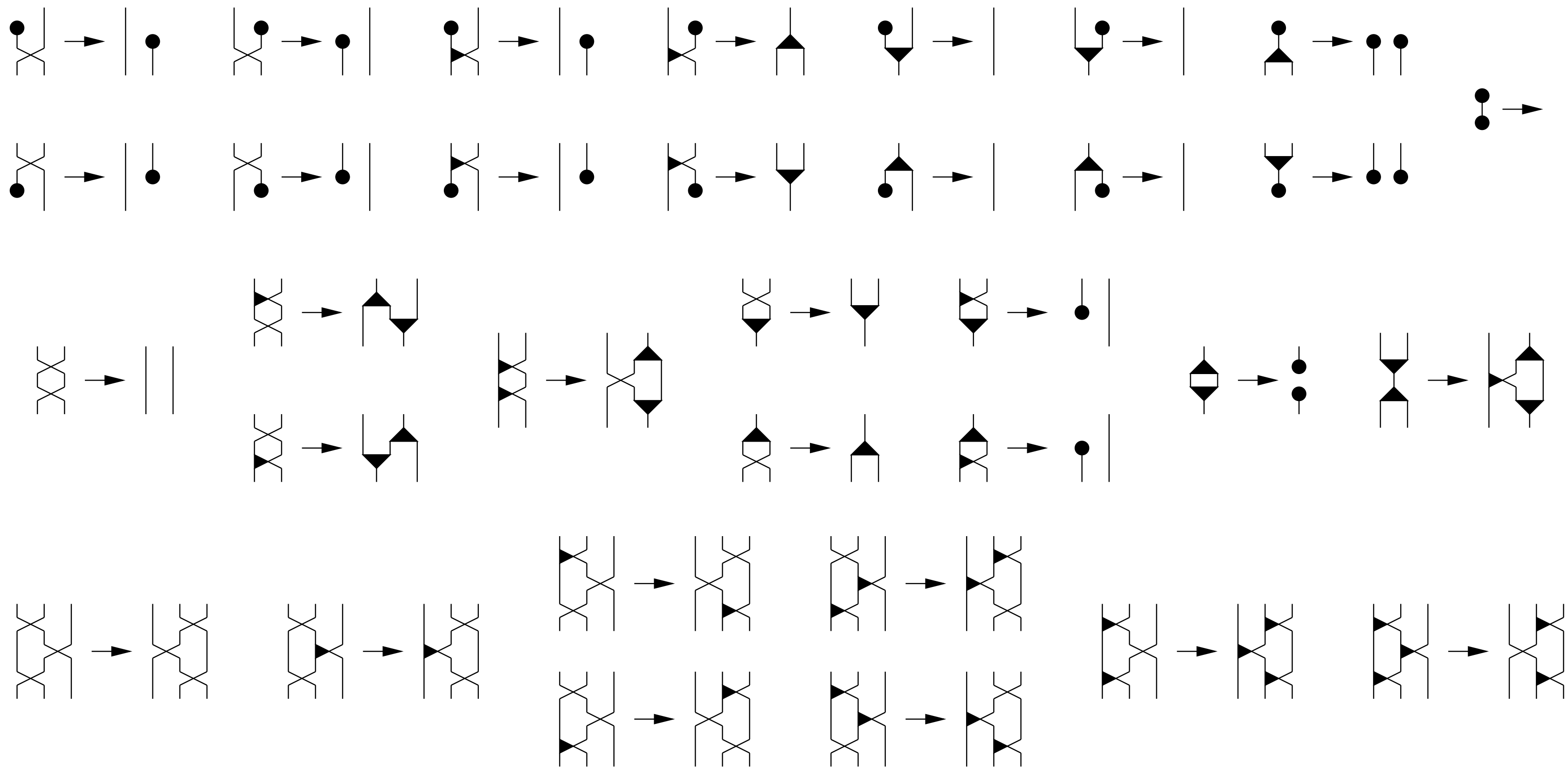
Après plusieurs autres modifications et ajouts de règles, on obtient la présentation appelée $L(\mathbb{Z}_2)$:

- Six opérateurs :



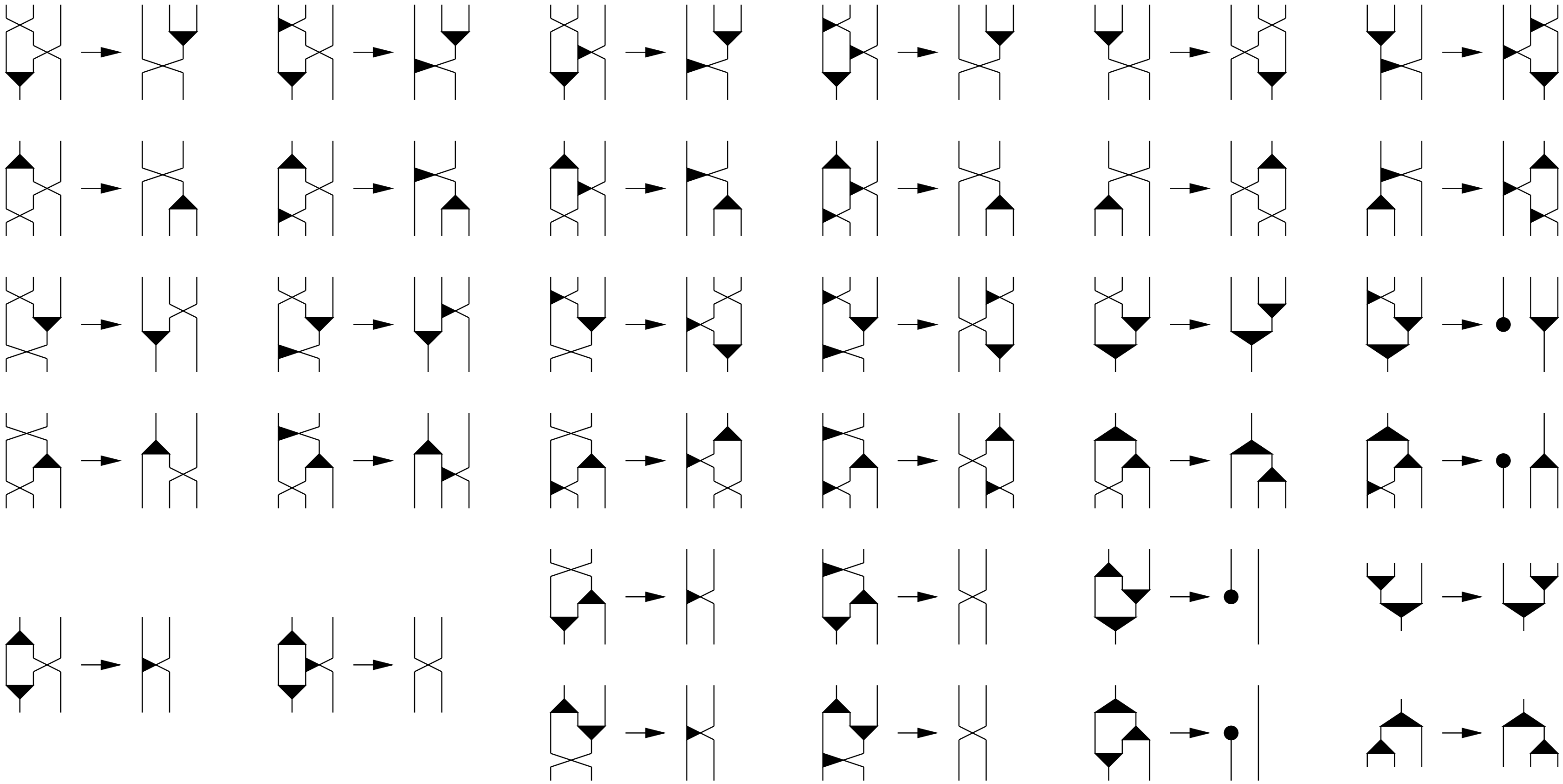
- Soixante-sept règles...

Trente-trois :



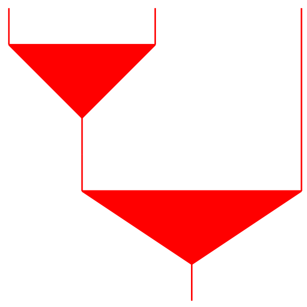
...

... plus trente-quatre :

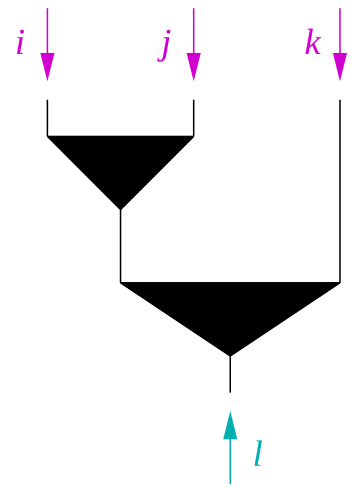


Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:

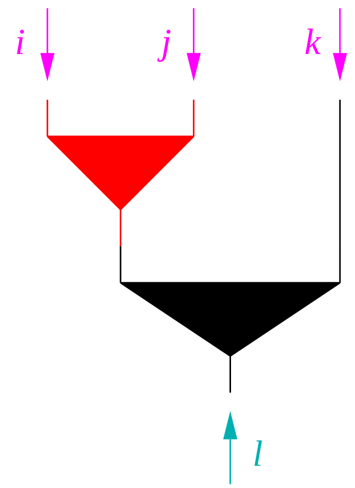
Terminaison de $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:



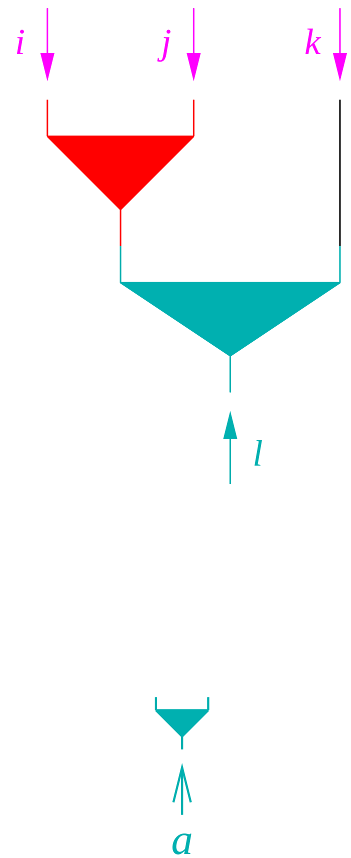
Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:



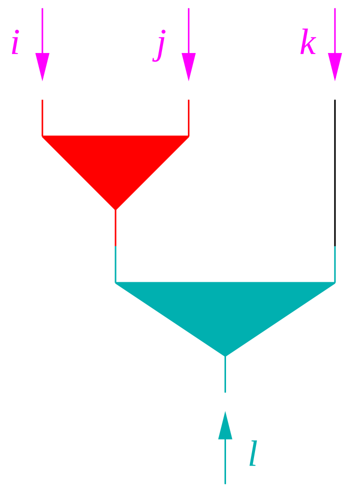
Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:



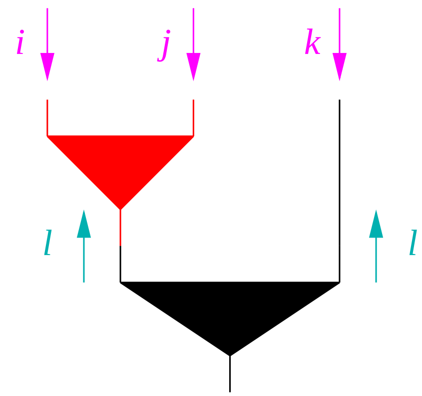
Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:

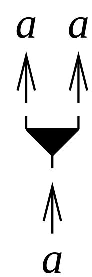


Terminaison de L($\mathbb{Z}_2$) :

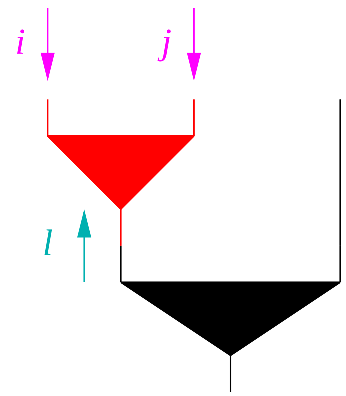


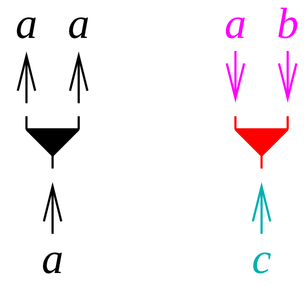
Terminaison de $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:



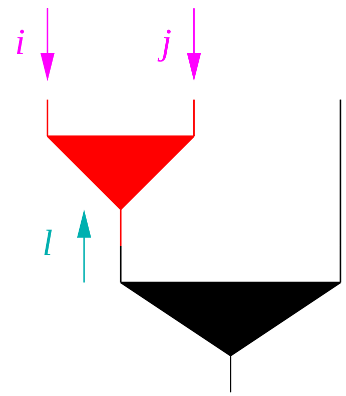


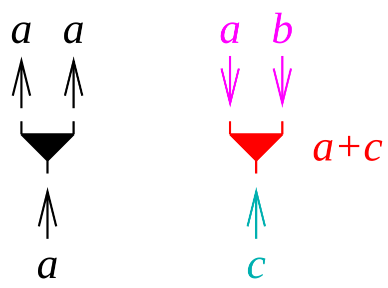
Terminaison de $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:



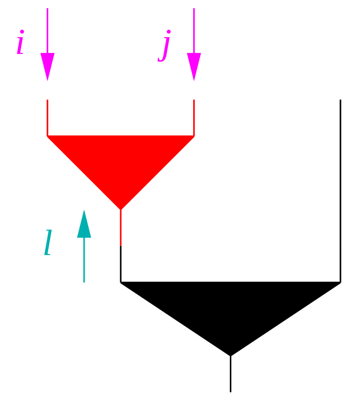


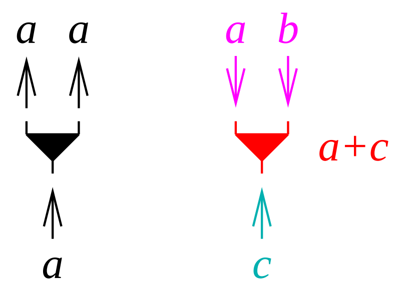
Terminaison de $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:





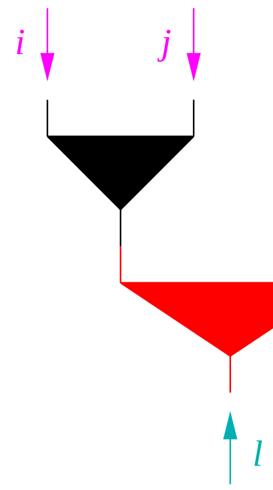
Terminaison de $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:

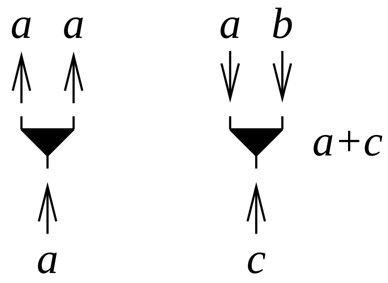




Chaleur produite : $i + l$.

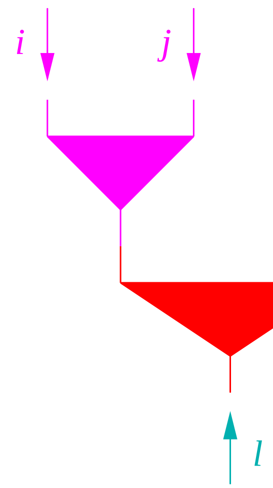
Terminaison de $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:

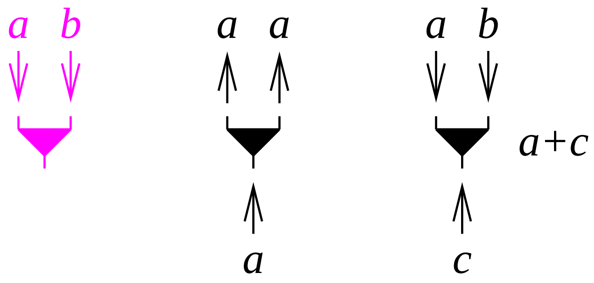




Chaleur produite : $i + l$.

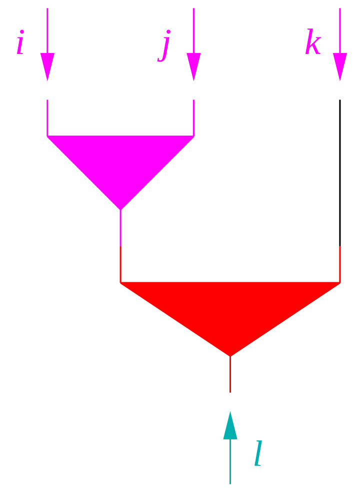
Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:

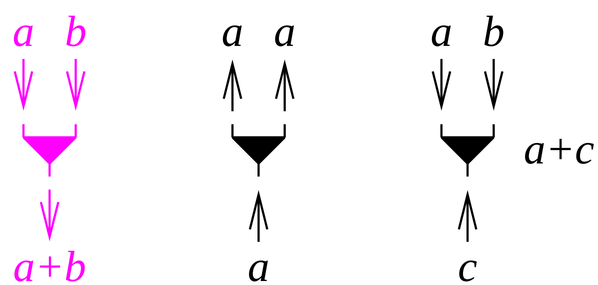




Chaleur produite : $i + l$.

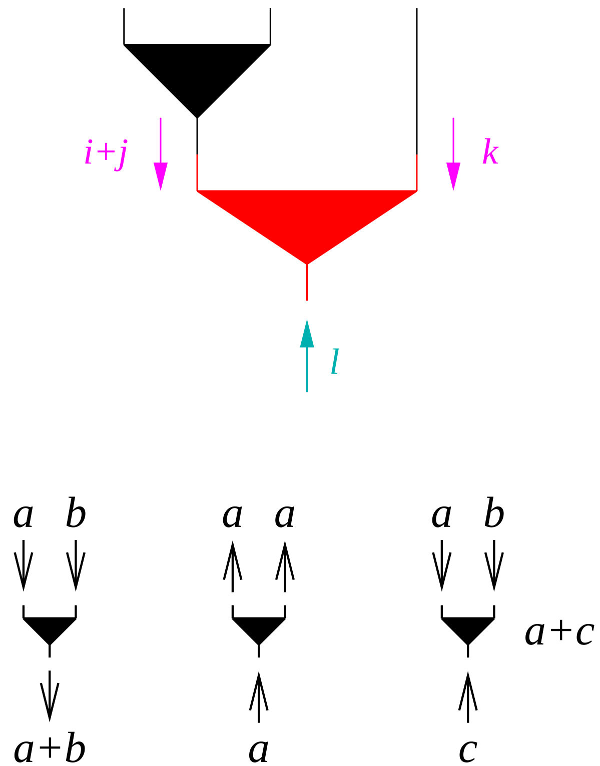
Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:





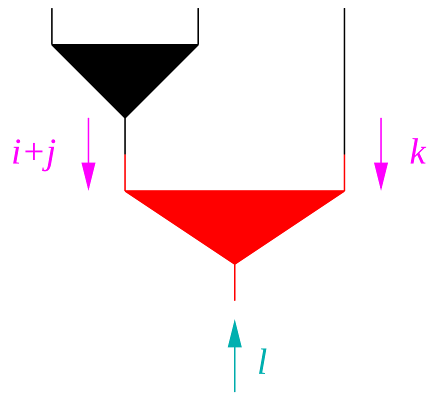
Chaleur produite : $i + l$.

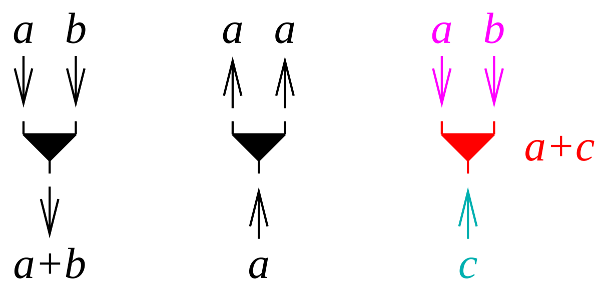
Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:



Chaleur produite : $i + l$.

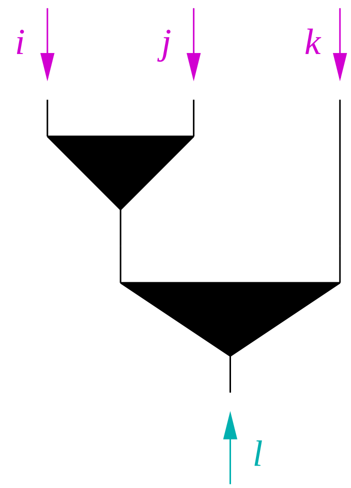
Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:

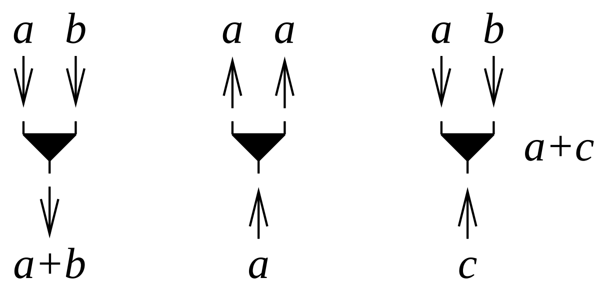




Chaleur produite : $i+l$ et $i+j+l$.

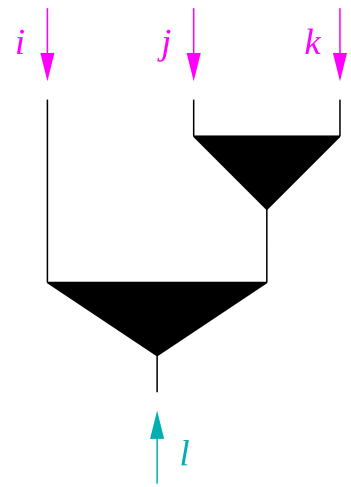
Terminaison de $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:

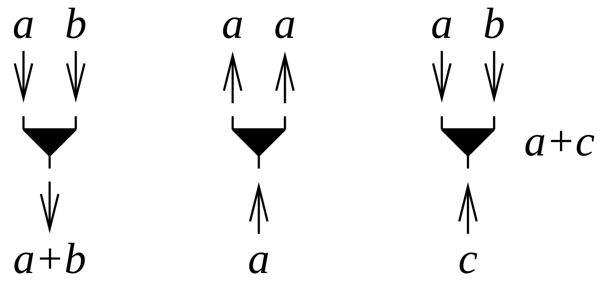




Chaleur produite : $2i + j + 2l$.

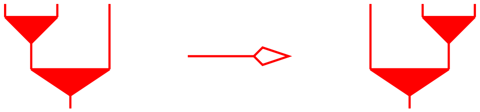
Terminaison de $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:



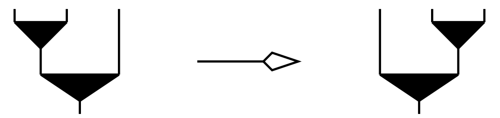


Chaleur produite : $i + j + 2l$.

Terminaison de $\mathrm{L}(\mathbb{Z}_2)$:

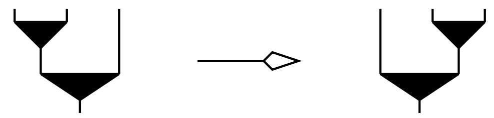


Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:



$2i+j+2l$ $\qquad$ $i+j+2l$

Terminaison de $L(\mathbb{Z}_2)$:



$2i+j+2l$ $\quad\quad$ $i+j+2l$

Que l'on traduit par :

Si l'on peut garantir que :

Si l'on peut garantir que :

- $f \to g$ implique $f > g$,

Si l'on peut garantir que :

- $f \rightarrow g$ implique $f > g$,
- il n'existe pas de suite : $f_0 > f_1 > f_2 > \cdots > f_k > f_{k+1} > \cdots$

Si l'on peut garantir que :

- $f \to g$ implique $f > g$,
- il n'existe pas de suite : $f_0 > f_1 > f_2 > \cdots > f_k > f_{k+1} > \cdots$

alors on aura la terminaison de la présentation d'opérade.

Théorème 2 :

Théorème 2 :

Soit (Σ, R) une présentation d'opérade.

Théorème 2 :

Soit (Σ, R) une présentation d'opérade. S'il existe :

Théorème 2 :

Soit (Σ, R) une présentation d'opérade. S'il existe :

- deux ensembles ordonnés X et Y (non vides),

Théorème 2 :

Soit (Σ, R) une présentation d'opérade. S'il existe :

- deux ensembles ordonnés X et Y (non vides),
- un monoïde commutatif M muni d'un ordre strict $>$ qui termine et qui est compatible avec l'addition,

Théorème 2 :

Soit (Σ, R) une présentation d'opérade. S'il existe :

- deux ensembles ordonnés X et Y (non vides),
- un monoïde commutatif M muni d'un ordre strict $>$ qui termine et qui est compatible avec l'addition,
- pour chaque $\varphi : m \to n$ dans Σ, trois applications croissantes :

$$\varphi_* : X^m \to X^n, \quad \varphi^* : Y^n \to Y^m, \quad [\varphi] : X^m \times Y^n \to M,$$

Théorème 2 :

Soit (Σ, R) une présentation d'opérade. S'il existe :

- deux ensembles ordonnés X et Y (non vides),
- un monoïde commutatif M muni d'un ordre strict $>$ qui termine et qui est compatible avec l'addition,
- pour chaque $\varphi : m \to n$ dans Σ, trois applications croissantes :

$$\varphi_* : X^m \to X^n, \quad \varphi^* : Y^n \to Y^m, \quad [\varphi] : X^m \times Y^n \to M,$$

tels que, pour toute règle $f \to g$ de R :

$$f_* \geq g_*, \quad f^* \geq g^*, \quad [f] > [g],$$

Théorème 2 :

Soit (Σ, R) une présentation d'opérade. S'il existe :

- deux ensembles ordonnés X et Y (non vides),
- un monoïde commutatif M muni d'un ordre strict $>$ qui termine et qui est compatible avec l'addition,
- pour chaque $\varphi : m \to n$ dans Σ, trois applications croissantes :

$$\varphi_* : X^m \to X^n, \quad \varphi^* : Y^n \to Y^m, \quad [\varphi] : X^m \times Y^n \to M,$$

tels que, pour toute règle $f \to g$ de R :

$$f_* \geq g_*, \quad f^* \geq g^*, \quad [f] > [g],$$

alors : la présentation d'opérade (Σ, R) termine.

Perspectives

Perspectives :

Perspectives :

- Confluence des présentations d'opérades.

Perspectives :

- Confluence des présentations d'opérades.
- Implantation des calculs.

Perspectives :

- Confluence des présentations d'opérades.
- Implantation des calculs.
- Calcul des structures.

Perspectives :

- Confluence des présentations d'opérades.
- Implantation des calculs.
- Calcul des structures.
- Le λ-calcul.

Perspectives :

- Confluence des présentations d'opérades.
- Implantation des calculs.
- Calcul des structures.
- Le λ-calcul.
- Circuits classiques et quantiques.

Présentations d'opérades et systèmes de réécriture

Yves Guiraud

28 juin 2004